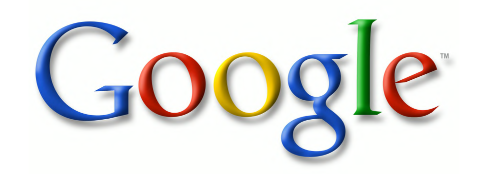
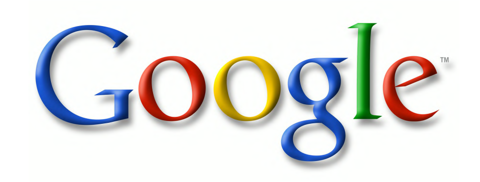
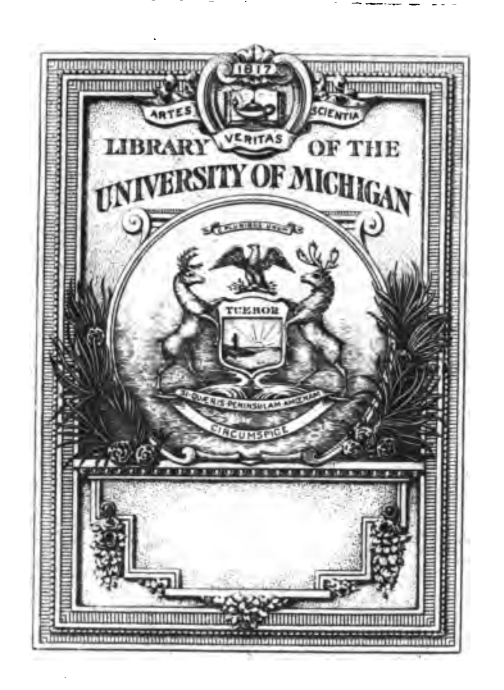



Google


1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

INTRODUCTION
AUX
SECTIONS CONIQUES,
POUR SERVIR DE SUITE
AUX ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE
DE M. RIVARD;

Ouvrage dans lequel on a renfermé les propriétés eſſentielles à l'intelligence du mouvement des corps qui font leurs révolutions dans quelqu'une de ces courbes, ſuivant les loix de la gravitation univerſelle.

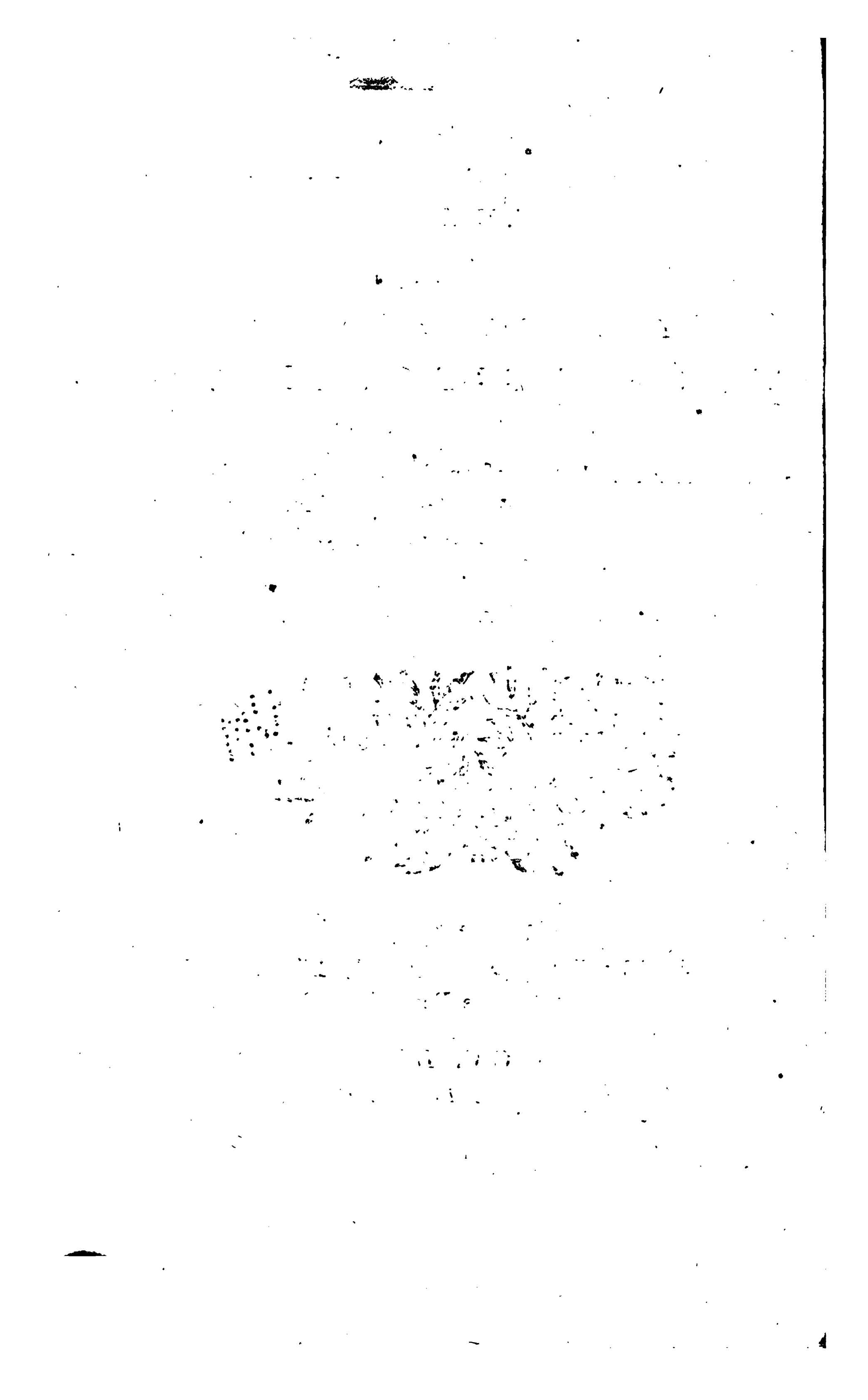
Antoine René
Par M. MAUDUIT Profeſſeur de Mathématiques.



A PARIS,
Chez DESAINT & SAILLANT, Libraires, rue Saint Jean de Beauvais.

M. DCC. LXI.

Avec Approbation & Privilége du Roi.



AVANT-PROPOS.

Ce petit Ouvrage, qui contient six Chapitres, est composé de deux Parties. Dans les quatre premiers qui font la premiere Partie, je me suis proposé de réunir tout ce qui seroit absolument nécessaire pour ceux qui voudroient l'enseigner dans une classe de Philosophie. J'ai tâché de donner à mes Démonstrations toute la facilité & la précision dont elles pouvoient être susceptibles. On a eu soin de mettre en plus petits caractères quelques propositions qui méritoient de trouver place dans ce petit Traité, quoiqu'elles ne fussent pas absolument nécessaires pour l'intelligence des suivantes; ainsi on pourra les passer, si on le juge à propos. Les deux derniers Chapitres qui forment la seconde Partie, sont une espéce d'introduction à l'analyse des suites & aux nouveaux calculs. J'ai eu principalement en vue ceux qui voudroient passer au-delà des Elémens, & s'instruire par eux-mêmes des principales découvertes que l'on a faites par le moyen de l'analyse moderne. Il y a cependant dans le cinquieme Chapitre deux Théorêmes nécessaires pour l'intelligence du mouvement des corps dans les Sections Coniques, suivant le système de la gravitation universelle de M. Newton. Les Démonstrations sont

un peu plus serrées dans cette partie, & l'on a tâché d'y mettre beaucoup de choses en peu de mots, sans négliger néanmoins la clarté qui fait le principal mérite de ces sortes d'Ouvrages.

Tel est à peu-près l'idée générale de ce petit Traité. Comme on pourroit s'imaginer que ce n'est qu'une répétition de ce que l'on trouve sur ces courbes dans tous les Ouvrages qui en ont parlé, je suis obligé d'entrer dans un certain détail sur chaque Chapitre en particulier, afin que chacun puisse juger de ce qui pourroit m'appartenir, au moins dans la maniere de présenter des vérités déja connues depuis long-tems.

Dans le premier, après avoir donné la définition du cône & de ses différentes espéces; après avoir montré comment les *Sections Coniques* peuvent s'y former, j'explique ce que c'est que *l'équation* d'une courbe. Cette définition appliquée au cercle fait voir comment ces équations peuvent servir à décrire les courbes auxquelles elles appartiennent, & à découvrir leurs principales propriétés. Ce premier Chapitre est une Introduction à l'Ouvrage entier. Les trois Chapitres suivans sont destinés à examiner en particulier chacune des trois Sections Coniques. De la description de ces courbes sur un plan par leurs foyers, on déduit leurs principales propriétés par rapport aux axes; & ensuite on démontre qu'elles ont aussi lieu pour les diametres, d'où l'on tire l'équation propre à chacune en particulier. On cherche ensuite l'expression algébrique

des lignes principales, telles que les *parametres*, les *tangentes*, les *sou-tangentes*, les *normales* & *sou-normales*.

Après avoir ainsi considéré chacune de ces courbes séparément, on donne dans le cinquieme Chapitre une construction commune à toutes les trois, qui n'est qu'un cas particulier d'une autre encore plus générale, & que l'on s'est contenté d'indiquer. Par le moyen de cette description, l'on peut traiter à la fois l'ellipse & l'hyperbole; ces deux courbes dont les formes sont si différentes, paroissent n'en plus faire qu'une seule, tant elles sympatisent dans leurs propriétés dont les expressions algébriques ne different que par les signes. La Parabole qui est la limite de l'ellipse & de l'hyperbole se déduit également de l'une ou de l'autre & peut se compter, comme on le juge à propos, dans le genre elliptique ou hyperbolique. Le fréquent usage que l'on fait de l'infini pour arriver à des résultats déja connus & démontrés par le fini, familiarise, pour ainsi dire, les Commençans avec cette idée métaphysique, & leur fait voir avec quelle précaution ils doivent traiter une matiere si délicate. On trouve dans ce Chapitre une théorie des *rayons de courbure* pour chaque Section Conique, avec leurs expressions algébriques. J'ai aussi ajouté quelques Problêmes dont j'aurois pû faire des Théorêmes; mais j'ai mieux aimé suivre la méthode analytique, parce que la solution & la construction se trouvent tout d'un coup démon-

trées par la suite même des opérations.

Enfin, le sixieme Chapitre, est comme nous l'avons déja dit, une introduction à l'analyse des infinis & aux nouveaux calculs par le moyen des suites dont je donne une théorie nouvelle. Pour arriver à cette théorie, je commence par la définition des cercles & des cônes des ordres supérieurs, d'où l'on tire sur le champ les équations aux Sections Coniques des différens degrés. Ensuite un Théorême nouveau sur les progressions Géométriques, & que son Auteur * avoit donné sans démonstration, me fournit un moyen fort simple d'arriver à l'expression générale des sou-tangentes de toutes les courbes du genre parabolique. De-là je passe par des Théorêmes connus à la quadrature de ces mêmes courbes à laquelle je rapporte celles de toutes les autres courbes qui ne sont qu'un assemblage d'ordonnées de courbes paraboliques dont le nombre est fini ou infini, suivant que l'expression algébrique de l'ordonnée peut se réduire à une suite d'un nombre de termes fini ou infini; ce qui me donne occasion de faire l'énumération des différentes quadratures algébriques des courbes. Je serois presque assuré que M. Newton est arrivé par une route semblable à la découverte du

* Ce Théorême qui est de M. *Landen* Géométre Anglois, m'a été communiqué par une personne d'un rare mérite dans les Mathématiques à qui j'avois fait part de la maniere dont je voulois arriver à la Théorie des suites par la quadrature des courbes du genre parabolique, sans supposer autre chose que la sommation des termes d'une progression géométrique.

calcul des *fluxions*, dont celui-ci ne differe qu'en ce que je fais la fluxion de l'abscisse égale à l'unité, comme l'a fait M. Newton lui-même, dans un Ouvrage auquel je renvoye le Lecteur. Les personnes au fait de la matiere, n'accuseront pas ce grand homme d'avoir commencé au hazard par la quadrature des courbes du genre parabolique. Cette théorie des suites une fois établie, je reviens à la quadrature algébrique des Sections Coniques. Je cherche par le même moyen les aires des trapeses & des secteurs hyperboliques; ce qui me conduit naturellement à la théorie des logarithmes qui n'est que présentée dans la plûpart des Traités de Sections Coniques, & qui ne se trouve dans un certain détail que dans les Ouvrages que l'on regarde communément comme fort au-dessus des Elémens; j'ai expliqué ce qu'il y a de plus intéressant sur ces nombres qui doivent partager à jamais avec leur inventeur, l'admiration de tous les Calculateurs. On y trouvera la maniere de calculer les logarithmes des tables pour les nombres premiers. Enfin, je quarre les trapeses ou secteurs hyperboliques par le moyen des logarithmes ordinaires, que plusieurs Auteurs ont si mal-à-propos distingués des logarithmes hyperboliques. Je sçais que cette solution suppose déja la quadrature de l'hyperbole & de ses parties; mais ceux qui font cette objection contre cette méthode de quarrer l'hyperbole, devroient aussi, par la même raison, rejetter la résolution des triangles

par les tables des sinus, parce que cette solution suppose la solution d'un triangle semblable au triangle donné. On verra aussi dans le même endroit ce que c'est qu'un *système* de logarithmes, & ce que les Géometres entendent par le *module* de chaque système. Outre les propriétés de l'hyperbole relatives aux logarithmes, cette courbe en a encore de plus singulieres lorsqu'on l'examine par rapport à son asymptote. L'espace infini compris entre cette courbe & la ligne dont on vient de parler, me donne occasion de rechercher la nature de cet infini. Je tâche de faire voir non-seulement que cet espace est infini; mais de montrer encore comment il peut être tel. Cette considération me conduit à un principe si lumineux que l'on voit tout d'un coup, par son moyen, l'accord des vérités qui paroissent les plus opposées. Enfin, je termine cet Ouvrage par un Théorême général sur les Sections Coniques semblables, d'où l'on peut déduire une infinité de vérités curieuses sur les sécantes intérieures & extérieures; & d'où l'on peut aisément tirer des solutions élégantes d'un grand nombre de Problêmes.

APPROBATION.

J'ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier un manuscrit qui a pour titre : *Introduction aux Sections Coniques*. La clarté & la précision qui régnent dans cet Ouvrage, me font juger qu'il peut faciliter aux Commençans l'étude des Sciences Physico-Mathématiques, & que l'impression en peut être utile. A Paris, ce 4. Décembre 1760. BEZOUT.

INTRODUCTION



INTRODUCTION AUX SECTIONS CONIQUES.

CHAPITRE PREMIER.

De la formation du Cône & de ses différentes espéces. Des Sections que l'on peut trouver dans ce corps en le coupant par un plan. Notions abrégées sur la maniere d'exprimer les Courbes par des équations, & sur les descriptions que l'on en tire.

ARTICLE PREMIER.

DÉFINITIONS.

SOIT un cercle ADB, & un point quelconque S élevé au-dessus du plan sur lequel ce cercle est décrit; si l'on fait passer par le point S une droite indéfinie ZSY qui parcoure par son extrémité inférieure la circonférence ADB du cercle donné, tandis qu'elle est fixée en S de façon néanmoins qu'elle peut tourner autour de ce point; elle engendrera dans ce mouvement un corps ter- Fig. 1.

A

miné par une surface courbe SADBEA & par le cercle proposé. Les Géometres ont donné à ce corps le nom de *cône*.

2. Le point fixe S s'appelle *sommet* du cône. Le cercle ADBEA se nomme la *base* de ce corps; une droite CS tirée du sommet S au centre C de la base est *l'axe* du cône.

3. Il y a deux espéces de cône; le *droit* & l'*oblique* ou *scalène*. Un cône est droit lorsque son axe CS est perpendiculaire au plan de la base; il est oblique lorsque ce même axe est incliné sur le plan de la même base.

COROLLAIRE PREMIER.

4. Il suit de cette génération du cône, 1°. que toute ligne droite menée du sommet S à un point quelconque de la circonférence de la base, est nécessairement sur la surface convexe du cône: 2°. que toute ligne droite qui du sommet S ira aboutir à un point pris au-dedans ou au-dehors de la base, sera aussi au-dedans ou au-dehors du cône; 3°. que toute section du cône faite par un plan qui passe par le sommet S, comme ASD, est nécessairement un triangle; car les lignes AS, DS qui sont les intersections du plan & de la surface convexe du cône, sont évidemment deux lignes droites, par la formation du cône; & de même AD est encore une ligne droite, puisque c'est l'intersection du plan coupant avec celui de la base du cône.

COROLLAIRE II.

5. Il suit encore de cette définition, que si l'on coupe le cône par un plan qui passe par l'axe, la section sera toujours perpendiculaire au plan de la base, dans un cône droit; & toujours inclinée sur la même base, dans un cône oblique; à moins que ce plan ne passe aussi par une perpendiculaire abaissée du sommet sur la base. Pour distin-

guer cette section triangulaire de tous les autres triangles que l'on peut couper dans le cône ; & parce que ce triangle est d'un plus grand usage dans la recherche des propriétés du cône, on lui a donné le nom de *triangle par l'axe*. Ainsi dans un cône droit tous les triangles par l'axe seront perpendiculaires à la base du cône ; & dans un cône oblique il ne peut y en avoir qu'un seul, que l'on détermine en abaissant du sommet S une perpendiculaire SK sur le plan du cercle ADB ; & en faisant passer un plan DSK par cette ligne & par l'axe du cône.

COROLLAIRE III.

6. Comme le cercle de la base peut être aussi éloigné qu'on voudra du point S ; ou, ce qui revient au même, comme on peut concevoir la ligne indéfinie YZ aussi grande qu'il plaira de l'imaginer ; il suit de cette génération du cône que ce corps & sa surface convexe peuvent s'étendre à l'infini au-dessus & au-dessous du sommet S. Car il est évident que tandis que la partie ZS de cette ligne décrit le cône ASB, son prolongement SY décrira la surface convexe ISL d'un cône semblable au premier, & qui lui est opposé par le sommet.

THÉOREME PREMIER.

7. *Si l'on coupe un cône quelconque* ASB *par un plan* EFH *parallele à la base, la section sera un cercle.* Fig. 2.

DÉMONSTRATION.

Soit tiré au centre C de la base l'axe CS qui rencontrera le plan de la section EFH dans un point D. Par deux points quelconques A, G de la circonférence de la base soient encore tirées au sommet S les droites AS, GS qui coupent le plan parallele à la base aux points E, F & soient tirées dans chaque plan les lignes ED,

FD ; AC , GC. Puisque ces plans sont paralleles ; leurs interfections avec les triangles ACS , GCS seront aussi paralleles ; & par conséquent les triangles ACS , EDS ; GCS , FDS seront semblables. Les premiers donnent AC : DE : : CS : DS ,
& les seconds CS : DS :: GC : FD ; donc AC : DE :: GC : FD ; mais AC=GC puisque la base est un cercle (*Art.* 1.) donc aussi DE=FD ; & comme on prouvera la même chose pour toute ligne menée du point D au périmetre EFH de la section ; il s'ensuit évidemment que cette section est un cercle. *Ce qu'il falloit démontrer.*

DÉFINITIONS.

8. 1re. Soit un triangle par l'axe quelconque CSD ;
Fig. 3. & dans ce triangle une droite AB parallele à l'un de ses côtés DS. Si par le point B où cette ligne coupe la base de ce triangle on éleve dans le plan du cercle CND une perpendiculaire NB*n* au diametre CD du même cercle ; la section du cône par un plan qui passera par les droites AB , N*n* , sera une courbe que l'on nomme *parabole*.

9. 2me. & 3me. Soit encore un triangle par l'axe quel-
Fig. 4. & 5. conque CSD , dont les deux côtés CS , DS sont coupés par une droite A*a*, tous deux au-dessous (*Fig.* 4.) ou l'un au-dessous & l'autre au-dessus du sommet S (*Fig.* 5). Si par le point B où cette ligne rencontre la base CD du triangle par l'axe , prolongée autant qu'il sera nécessaire , on éleve dans le plan du cercle CKD une perpendiculaire N'B*n'* à la même ligne CD ; la section du cône CSD & d'un plan qui passera par les droites AB , N'*n'* , sera une courbe AM*am*A (*Fig.* 4) que l'on a nommé *ellipse* ou (*Fig.* 5). une courbe indéfinie N'MA*mn'* à laquelle on a donné le nom d'*hyperbole*.

COROLLAIRE.

10. Donc il n'y a que cinq manieres différentes de couper un cône, & par conséquent il ne peut y avoir que cinq especes différentes de sections coniques. 1°. La section sera un triangle toutes les fois que le plan de section passera par le sommet S (*Art.* 4.). 2°. Elle sera un cercle lorsque le plan coupant sera parallele à celui de la base (*Art.* 7.). 3°. Une parabole lorsque la commune section de ce plan & du triangle par l'axe est parallele à l'un des côtés du même triangle. 4°. Une ellipse lorsque la même commune section coupe les deux côtés du triangle par l'axe au-dessous du sommet. 5°. Enfin une hyperbole lorsque cette même intersection du plan coupant & du triangle par l'axe coupe l'un des côtés de ce triangle l'un au-dessus & l'autre au-dessous du sommet S. Il faut bien remarquer que dans cette derniere disposition du plan coupant, il se forme encore une nouvelle hyperbole M*am* dans le cône opposé par le sommet au cône CSD, laquelle est censée ne faire qu'une seule courbe avec la premiere MA*m*, comme on le verra par la suite.

11. Définition 4me. La ligne AB commune intersection du triangle par l'axe & du plan coupant, se nomme *diametre* de la courbe MA*m*. Elle prend le nom d'axe lorsque l'angle ABN′ est un angle droit; ce qui arrivera toujours dans un cône droit, & ne pourroit avoir lieu dans un cône oblique, que dans le cas où le triangle par l'axe seroit perpendiculaire à la base.

5me. Les droites MP, MP menées d'un point M de la courbe jusqu'au diametre AB, parallelement à BN ou BN′, sont appellées *ordonnées* de la courbe.

6me. Les points A, *a* où le diametre de la courbe rencontre les côtés du triangle par l'axe sont les *sommets* de la courbe ou les *origines* de ce diametre. D'où il suit que la parabole ne peut avoir qu'un sommet, & que son diametre ne peut avoir qu'une origine.

7me. Les parties AP, ou AP, *a*P du diametre comprises entre l'origine ou les origines de ce diametre & la rencontre P de l'ordonnée MP, sont nommées les *abscisses* ou *coupées* ; d'où il suit encore que chaque ordonnée PM dans la parabole, ne peut avoir qu'une abscisse finie AP.

THEOREME II.

Fig. 3. 12. *Dans une parabole quelconque* MAm, *les quarrés* $\overline{PM^2}$, $\overline{NB^2}$, *des ordonnées* PM, NB *au diametre* AB *sont entr'eux comme les abscisses correspondantes* AP & AB.

DÉMONSTRATION.

Par la ligne MP soit imaginé un plan FMG parallele à la base du cône ; la section de ce corps par le même plan sera un cercle qui aura pour diametre FG (*Art.* 7) ; & puisque NB est par construction perpendiculaire au diametre CD, FM qui lui est parallele sera aussi perpendiculaire au diametre FG ; donc les lignes MP*m*, NB*n* seront divisées en deux également aux points P, B & leurs moitiés PM, BN seront des ordonnées aux cercles FMG, CND ; donc on aura pour l'un $\overline{MP^2} = FP \times PG$, & pour l'autre $\overline{NB^2} = CB \times BD$; donc $\overline{MP^2} : \overline{NB^2} :: FP \times PG : CB \times BD$ ou $:: FP : CB$; en divisant les deux derniers termes du dernier rapport par les lignes PG & BD égales à cause des paralleles AB, DS entre lesquelles elles sont comprises. Mais puisque les lignes FP, CB sont paralleles, les triangles CAB, FAP sont semblables & donnent $FP : CB :: AP : AB$; donc on aura aussi par la même raison $\overline{MP^2} : \overline{NB^2} :: AP : AB$. *C. Q. F. D.*

THEOREME III.

13. *Dans l'ellipse & dans l'hyperbole les quarrés* $\overline{PM^2}$,
Fig. 4. & 5. $\overline{QN^2}$ *de deux ordonnées quelconques* PM, QN *à un diametre* AB *sont entr'eux comme les produits* AP×aP,

$AQ \times aQ$ *des abscisses* AP, aP, AQ, aQ *correspondantes à ces ordonnées.*

DÉMONSTRATION.

Par les ordonnées PM, QN je fais passer des plans FMG, HNL paralleles au plan de la base du cône : les sections FMG*m*, HNL*n* seront des cercles dont les lignes FG, HL sont évidemment les diametres (*Art.* 7). De plus, parce que les lignes N'B*n'* sont, par construction, perpendiculaires à CD; les lignes MP*m*, NQ*n* qui leur sont paralleles seront aussi chacune respectivement perpendiculaires aux diametres FG, HL; donc elles seront coupées en deux également par les mêmes diametres, & par celui A*a* de la courbe MA*m*. Cela posé, à cause des cercles FMG, HNL on aura $\overline{MP}^2 = FP \times PG$, & $\overline{QN}^2 = HQ \times QL$; donc $\overline{MP}^2 : \overline{QN}^2 :: FP \times PG : HQ \times QL$; mais les triangles PAF, QAH, G*a*P, L*a*Q sont semblables à cause qu'ils ont leurs bases sur des paralleles FG, HL, & donnent ces deux analogies $\begin{cases} FP : HQ :: AP : AQ \\ GP : LQ :: aP : aQ \end{cases}$ donc en multipliant ces deux proportions par ordre, on aura $FP \times GP : HQ \times QL :: AP \times aP : AQ \times aQ$; d'où il suit évidemment que l'on aura $\overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2 :: AP \times aP : AQ \times aQ$. *C. Q. F. D.*

SCHOLIE.

14. Les deux Théorêmes qu'on vient de démontrer renferment les principales propriétés des Sections Coniques considérées par rapport à leurs axes ou par rapport à leurs diametres. On pourroit aisément démontrer un grand nombre d'autres affections de ces mêmes courbes en les supposant toujours dans le solide; il seroit même facile de trouver les équations de chacune dans le cône; mais on ne se propose ici que de faire voir comment elles y sont formées. Dans le reste de cette introduction nous les supposerons décrites sur un plan; & de

cette description, que l'on pourra si l'on veut regarder comme une définition, nous en déduirons les vérités dont on a besoin dans la Physique Astronomique telle qu'on l'enseigne aujourd'hui ; après avoir expliqué en peu de mots, dans le reste de ce Chapitre, ce que l'on entend par *l'équation* d'une courbe.

15. On appelle *fonction* d'une quantité, ce qu'elle devient lorsqu'on a fait sur elle certaines opérations. Par exemple, si l'on multiplie la grandeur a par m, si on la divise par b, si on l'éleve à une puissance p, ou si l'on en prend la racine q ; les différentes expressions analytiques des quantités ma, $\frac{a}{b}$, a^p, $\sqrt[q]{a}$ dans lesquelles elle se change par ces opérations, sont des fonctions de cette quantité. De plus si l'on combine ces fonctions entr'elles ou avec une autre quantité par addition, soustraction, multiplication, division, &c ; les résultats seront encore des fonctions de la même quantité.

16. Les Géometres conçoivent & démontrent que toutes les courbes qu'ils appellent *courbes algébriques*, peuvent être déterminées par un certain rapport constant entre certaines fonctions aussi constantes des abscisses & d'autres fonctions des ordonnées. Pour cela ils choisissent ordinairement sur une ligne droite à laquelle ils rapportent tous les points de la courbe, un point fixe A qu'ils regardent comme l'origine des co-ordonnées. Ils désignent toujours par x les parties AP, AP de cette ligne, & par y les ordonnées correspondantes PM dont
Fig. 6. l'inclinaison sur AP est toujours supposée connue. La variété des rapports entre les fonctions des x & celles des y forme toute la variété des courbes dont le nombre est infini. L'équation algébrique qui contient ces rapports, & qui les exprime tous à la fois d'une maniere générale pour toutes les abscisses & les ordonnées d'une même courbe, s'appelle *l'équation* à cette courbe. Le dégré dans lequel se trouvent ces mêmes indéterminées x & y,

détermine le dégré de l'équation, qui ſe prend toujours du terme où ces indéterminées ſe trouvent à la plus haute puiſſance, ou ſéparément, ou par leurs combinaiſons l'une avec l'autre. Chaque dégré forme une ſuite de courbes d'un même ordre, qui varient néanmoins entre elles ſuivant les différentes combinaiſons poſſibles des indéterminées x & y pour chaque dégré. Ces équations peuvent ſervir à décrire les courbes, mais leur principal uſage eſt de fournir des moyens faciles de diſcuter les courbes auxquelles elles appartiennent, & d'en faire connoître les principales propriétés en donnant ſucceſſivement des valeurs connues à l'une ou à l'autre des indéterminées pour avoir la valeur de chacune. Comme il n'y a que le cercle que nous puiſſions ſuppoſer connu des Commençans, nous nous en ſervirons pour faire entendre plus aiſément ce que nous venons de dire.

17. Soit un cercle quelconque AM*am* dont le diametre eſt A*a*; & l'origine des co-ordonnées AP, PM à l'une des extrémités A de ce diametre. Soit A$a=2a$; AP$=x$; PM, y; aP ſera $2a-x$. On ſçait par les Elémens que l'on a pour une ordonnée quelconque PM; $\overline{PM}^2=AP\times aP$; mettant au lieu des lignes PM, AP, aP leurs expreſſions algébriques, on trouvera cette équation $yy=2ax-xx$, que l'on appelle *équation au cercle*. Préſentement ſi dans cette égalité on ſuppoſe $x=0$, ou $x=2a$; on trouvera dans l'un & dans l'autre cas $\pm y=0$; d'où il ſuit qu'aux extrémités du diametre A, a les points de la courbe ſe confondent avec les mêmes points A & a; puiſque les diſtances des points de la courbe au diametre ſont égales à zéro. Si l'on fait $x=a$, on trouvera $yy=aa$, & par conſéquent $y=\pm a$; d'où il ſuit que les points M, m qui deviennent B, b ſe trouvent tous deux éloignés du centre C d'une quantité égale à CA. Le $+a$ marque l'ordonnée poſitive CB au-deſſus du diametre, & le $-a$ déſigne l'ordonnée négative Cb qui eſt au-deſſous du même diametre. Si l'on ſuppoſe l'ab- Fig. 6.

ſciſſe x ſucceſſivement égale à certaines parties du diametre, on calculera par cette équation la longueur des ordonnées poſitives ou négatives PM, Pm correſpondantes. Par exemple,

ſi $x = \frac{a}{2}$, ou $a + \frac{1}{2}a$, on trouvera $\pm y = \pm \frac{a}{2}\sqrt{3}$

ſi $x = \frac{a}{3}$, ou $a + \frac{2}{3}a$, ... $\pm y = \pm \frac{a}{3}\sqrt{5}$

ſi $x = \frac{a}{4}$, ou $a + \frac{3}{4}a$, ... $\pm y = \pm \frac{a}{4}\sqrt{7}$

ſi $x = \frac{a}{5}$, ou $a + \frac{4}{5}a$, ... $\pm y = \pm \frac{a}{5}\sqrt{9} = \frac{3}{5}a$;

on trouveroit de même des valeurs numériques de toutes les ordonnées correſpondantes à d'autres abſciſſes. Enfin ſi l'on ſuppoſe x plus grande que $2a$ ou de telle grandeur qu'on voudra, priſe négativement. L'équation $yy = 2ax - xx$ ne donne plus pour y que des valeurs imaginaires, ce qui fait connoître que la courbe ne peut avoir aucun de ſes points au-delà des extrémités du diametre Aa. Il faut bien remarquer que l'on peut prendre où l'on veut l'origine des abſciſſes; ſi, par exemple, on fixoit cette origine au centre C en nommant CP, x, & PM, y, on auroit pour chaque point P, $yy = aa - xx$; nouvelle équation au cercle, dont on déduiroit les mêmes conſéquences que de la précédente.

Nous ferons ici une obſervation générale pour toutes les courbes exprimées par des équations. C'eſt que l'origine des co-ordonnées eſt néceſſairement ſur un point de la courbe, lorſque tous les termes de ſon équation ſont affectés des indéterminées x ou y. Quand au contraire il y a dans cette équation un terme entierement connu, alors l'origine des co-ordonnées ne peut être ſur un point de la courbe. Pour s'en convaincre, ſoit une équation générale $ax^m + bx^p y^q + cy^n = 0$; il eſt viſible que ſi l'on fait dans cette équation $x = 0$, on en tire $cy^n = 0$, ou $y = 0$. Donc l'origine des co-ordonnées eſt ſur la courbe. Pareillement ſi l'on fait $y = 0$; on en tire $ax^m = 0$, & partant $x = 0$; ce qui

revient précisément au même que le cas précédent. Mais si l'on a une équation qui renferme quelque terme connu comme $ax^m + bx^p y^r + cy^s - g^n$; en faisant $x = o$, on trouve $cy^s - g^n = o$, & partant $y^s = \frac{g^n}{c}$ ou $y = \sqrt[s]{\frac{g^n}{c}}$; ce qui prouve que le point M de la courbe est éloigné de l'origine des x de la quantité $\sqrt[s]{\frac{g^n}{e}}$, & que cette même origine des co-ordonnées n'est pas sur le périmetre de la courbe. On déduiroit la même vérité en faisant $y = o$; ce qui donneroit $x = \sqrt[m]{\frac{g^n}{a}}$.

CHAPITRE II.

Des propriétés de la Parabole considérée sur un plan.

DÉFINITION.

18. SOIT *une droite quelconque indéfinie* RS, *que nous nommerons* directrice, *& sur le même plan hors de cette droite un point donné* F, *que nous appellerons* foyer. *Si l'on cherche une infinité de points* M *tels que les deux lignes menées d'un de ces points l'une* MF *au foyer* F, *l'autre* MQ *perpendiculaire à la directrice* RS *soient égales entre elles, la courbe qui passera par tous ces points est une* parabole. Fig. 7.

PROBLEME I.

19. *Supposant la définition qu'on vient de donner de la parabole, décrire cette courbe, ou, ce qui revient au même, trouver autant de points* M *que l'on voudra.*

SOLUTION.

Par le point F on abaissera sur la directrice RS une perpendiculaire FB, à laquelle on élevera par tant de

points P que l'on voudra des perpendiculaires indéfinies mPM. Ensuite du foyer F comme centre avec un rayon FM=BP, on décrira une portion de cercle sur chaque indéterminée correspondante à BP qui sert de rayon, laquelle coupera cette droite MPm en deux points M, m qui seront les deux points de la courbe sur cette même ligne.

DÉMONSTRATION.

Du point trouvé M soit abaissée la droite MQ perpendiculaire à la directrice ; on aura QM=BP à cause du rectangle BPMQ ; mais (construction) BP=FM ; donc on aura QM=FM, donc le point M est à la parabole suivant sa définition. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

20. Il suit de cette description & de la définition qu'on vient de voir, que la parabole passe nécessairement par le milieu A de BF ; puisque dans ce point BA=AF.

COROLLAIRE II.

21. Il suit encore de-là que cette courbe est composée de deux branches infinies AMM, Amm qui s'éloignent continuellement de la ligne AP, & qui sont placées symétriquement à l'égard de cette même droite ; laquelle divise par conséquent la courbe en deux parties égales.

DÉFINITIONS.

22. La ligne AP s'appelle *l'axe* de la parabole ; le point A milieu de BF est nommé le *sommet* de cette courbe. Une droite MP menée d'un point M de la courbe perpendiculairement à l'axe est une *ordonnée* à cet axe. Les parties AP de l'axe comprises entre le sommet & la rencontre des ordonnées sont les *abscisses* corres-

pondantes aux ordonnées PM. On donne le nom de *parametre* à une ligne double de BF.

THEOREME I.

23. *Dans la parabole, le quarré* $\overline{PM}^2$ *d'une ordonnée quelconque* PM *est égal au produit de son abscisse* AP *par le parametre.* Fig. 7.

DÉMONSTRATION.

Soit nommée la ligne connue AF ou AB, a; le parametre p double de BF sera $4a$; soit encore fait AP$=x$, & PM$=y$; lorsque le point P tombe entre le sommet A & le foyer F, la ligne FP sera $a-x$; au contraire FP sera $x-a$, lorsque le point P tombe au-delà du foyer par rapport au sommet A. Cela posé, dans l'un & l'autre cas, à cause du triangle-rectangle FPM on aura $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$; mais FM$=BP=a+x$ par la construction de la courbe (*Art.* 18); on aura donc en mettant les valeurs analytiques $yy=aa+2ax+xx-aa+2ax-xx=4ax$, ou px; puisque $p=4a$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

24. Il suit de-là que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les abscisses correspondantes; car soit y une ordonnée quelconque dont l'abscisse est x, & Y une autre ordonnée dont l'abscisse est X; on aura pour la premiere $yy=px$, & pour la seconde $YY=pX$; donc $yy : YY :: px : pX :: x : X$ en divisant les deux termes de la derniere raison par le facteur commun p.

COROLLAIRE II.

25. De l'équation $yy=px$ on en tire $p : y :: y : x$; donc une ordonnée quelconque est moyenne-proportionnelle entre le parametre & l'abscisse qui lui répond; d'où il suit que de ces trois lignes le parametre, une or-

donnée & l'abſciſſe correſpondante, deux quelconques étant connues, la troiſiéme ſera auſſi connue néceſſairement.

COROLLAIRE III.

26. Il ſuit encore de-là que la double ordonnée qui paſſe par le foyer F eſt égale au parametre. Car dans ce cas l'abſciſſe AP (x)$=$AF (a) ou $\frac{1}{4}p$ (*Art.* 22. & 23); donc $yy=\frac{1}{4}pp$, & partant $y=\frac{1}{2}p$; donc $2y=p$.

PROBLEME II.

Fig. 8. 27. *Par un point* M *donné ſur la parabole, mener une tangente à cette courbe.*

SOLUTION.

Du point donné M ſoit menée au foyer F une droite MF, & ſur la directrice une perpendiculaire MQ; ayant tiré la droite FQ, ſi par le milieu D de cette ligne & le point donné M on fait paſſer une droite MD; elle ſera la tangente demandée.

DÉMONSTRATION.

D'un point quelconque m de MD différent de M ſoient menées les droites mF, mQ & mq, dont la derniere ſoit perpendiculaire à la directrice. Par conſtruction la droite MD eſt perpendiculaire ſur le milieu de QF, puiſque MF$=$MQ (*Art.* 18), & que FD$=$QD. Donc cette droite paſſe par tous les points également éloignés de F & de Q; donc mF$=m$Q; mais $mq<m$Q; donc auſſi $mq<m$F; donc le point m n'eſt pas à la parabole ſuivant la définition de cette courbe. Et comme on fera voir la même pour tout autre point différent de M, il eſt évident que ce même point M eſt le ſeul qui puiſſe appartenir à la courbe & à la droite MD; donc la droite MD eſt tan-

gente au point donné. *Ce qu'il falloit trouver & démontrer.*

COROLLAIRE I.

28. Si l'on prolonge la tangente MD jusqu'à ce qu'elle rencontre l'axe aussi prolongé en T, la partie PT de l'axe comprise entre le point T & l'extrémité P de l'ordonnée qui passe par le point de contact, sera double de l'abscisse AP correspondante à l'ordonnée MP: car par la construction de la tangente, l'angle FMD = DMQ; mais DMQ = FTM à cause des paralleles FT, QM; donc le triangle MFT est isoscele; donc on aura FT = FM; mais FM = MQ (*Art.* 18), & MQ = BP à cause du rectangle BPMQ; donc FT = BP, & si de ces lignes égales on ôte les lignes égales AB, AF, on aura AT = AP; d'où il suit que PT = 2AP. On a nommé *Sou-tangente* la ligne PT; donc en nommant toujours AP, x; l'expression de la sou-tangente PT sera $2x$.

COROLLAIRE II.

29. Il suit encore de-là que si par le point M on éleve perpendiculairement à la tangente MT une droite MR terminée à l'axe en R, la partie RP du même axe, que nous nommerons *Sou-perpendiculaire*, sera égale à la moitié du parametre. Car à cause des triangles-rectangles RPM, FBQ égaux & semblables puisqu'ils sont formés de paralleles FQ, MR; BQ, PM, on aura PR = BF = $2a$ ou $\frac{1}{2}p$; d'où il suit que dans la parabole la sou-perpendiculaire est une grandeur constante & toujours égale à la moitié du parametre. Cette proposition suit aussi de ce que le triangle-rectangle TPM donne cette proportion PT ($2x$) : PM (y) : : PM (y) : PR $\left(\frac{yy}{2x}\right)$, ou $\frac{px}{2x} = \frac{1}{2}p$.

COROLLAIRE III.

30. Connoissant la sou-tangente PT, & la sou-perpendiculaire RP, il est aisé d'avoir l'expression analytique de la tangente MT, & de la perpendiculaire MR que l'on appelle aussi la *Normale*. A cause du triangle-rectangle MPT on trouvera $MT = \sqrt{px + 4xx}$, & pareillement à cause du triangle-rectangle MPR, on aura $MR = \sqrt{px + \frac{1}{4}pp}$, ou $\sqrt{x + \frac{1}{4}p \times p}$, ou $\sqrt{4x + p \times \frac{1}{4}p}$; donc $MT : MR :: \sqrt{px + 4xx} : \sqrt{p + 4x \times \frac{1}{4}p} :: \sqrt{x} : \frac{1}{2}\sqrt{p}$; en divisant chaque terme du dernier rapport par $\sqrt{p + 4x}$.

COROLLAIRE IV.

31. Si l'on prolonge la droite MQ au-dedans de la parabole vers E, les angles formés d'un même côté de la tangente avec cette ligne par les droites ME, MF, seront visiblement égaux. Car, par construction, FMD = DMQ. Mais DMQ = EML qui lui est opposé au sommet; donc FMD = EML, d'où il suit que si dans une parabole ou dans la concavité d'un corps formé par la révolution de cette courbe autour de son axe, l'on reçoit des rayons paralleles au même axe; ils seront tous réfléchis au foyer F, par le périmetre de la courbe, ou par la surface concave du paraboloïde. C'est une suite nécessaire de l'égalité des angles FMD, EML, & des loix des corps élastiques. Réciproquement si le foyer F est un point lumineux, tous les rayons partis de ce point & réfléchis à la rencontre de la courbe le seront suivant des directions paralleles à l'axe; & c'est de ces propriétés que lui vient le nom *de foyer* qu'on lui a donné.

DÉFINITION.

32. Nous appellerons dans la suite *rayon vecteur*, toute ligne MF menée du foyer à un point quelconque M de la courbe.

THEOREME.

THÉOREME II.

33. *Supposant différentes tangentes comme* MT *menées à différens points de la courbe, si du foyer* F *on abaisse sur chacune une perpendiculaire comme* FD ; *je dis, que ces perpendiculaires* FD *croissent comme les racines quarrées des rayons vecteurs correspondans.* Fig. 8.

DÉMONSTRATION.

Si par le point A & le point D on mene la droite AD, il est visible que cette ligne sera parallele à la directrice BQ, puisqu'elle divise les côtés BF, QF chacun en deux également ; donc cette ligne est perpendiculaire à l'axe AF ; donc les triangles-rectangles FAD, FDT seront semblables ayant l'angle en F commun, & donneront FA : FD :: FD : FT = FM (*art.* 28). Donc FA×FM = $\overline{FD}^2$; imaginant une autre F*d* & une autre F*m*, on démontrera de même que FA×F*m* = $\overline{Fd}^2$; donc $\overline{FD}^2$: $\overline{Fd}^2$ :: FA×FM : FA×F*m* :: FM : F*m* ; donc en tirant les racines FD : F*d* :: $\sqrt{FM}$: $\sqrt{Fm}$. *C. Q. F. D.*

DÉFINITIONS.

34. Toute droite MQ menée par un point M de la parabole parallelement à l'axe de cette courbe, s'appelle un *Diametre*. On appelle *Origine* de ce diametre le point M où il coupe la courbe. Toute droite NQ parallele à la tangente en M terminée à la courbe en N & au diametre en Q, est une *ordonnée* à ce diametre. On appelle *Abscisses* ou *Coupées* les parties d'un diametre comprises entre l'origine de ce diametre & l'extrémité Q de l'ordonnée NQ terminée à ce même diametre. Fig. 9.

THÉOREME III.

35. *Supposant toujours la tangente* MT *terminée à l'axe en* T ; *si par l'origine* A *on éleve la tangente* ACL *per-* Fig. 9.

pendiculaire au même axe, & qui rencontre la tangente MT *en* C *& le diametre* MQ *prolongé en* L; *je dis que le triangle* CAT *est égal au triangle* MCL.

DÉMONSTRATION.

Ces triangles CAT, MCL sont tous deux rectangles puisque les droites ML, AF sont paralleles & que AC est perpendiculaire sur l'une des deux AF; de plus le côté AT de l'un est égal au côté LM de l'autre, car AT=AP (*art.* 28), & AP=ML à cause du parallélogramme APML; enfin les angles en C sont égaux puisqu'ils sont opposés au sommet. Donc CAT=MCL. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

36. Donc le triangle TMP est égal au rectangle APML; car si de ces quantités on ôte le trapeze commun ACMP, les restes seront les deux triangles CAT, CLM, dont on vient de prouver l'égalité.

COROLLAIRE II.

37. Il suit encore de-là, que si par un point N de la courbe on mene une ordonnée QNR au diametre MQ, terminée à l'axe prolongé, s'il est nécessaire en R; & par le même point N une autre ordonnée GN à l'axe AP, terminée au diametre MQ aussi prolongé s'il le faut en H, on aura le triangle GRN égal au parallélogramme AGHL; car à cause des paralleles MP, GN, MT, QN, les triangles MPT, NGR seront semblables; donc ils sont entr'eux comme les quarrés des côtés homologues; ainsi MPT : NGR :: $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2$. Par la nature de la parabole............... $\overline{PM}^2 : \overline{GN}^2$ :: AP : AG ou :: APML : AGHL; puisque ces rectangles étant compris entre paralleles sont comme leurs bases AP, AG; donc à cause de cette suite de rapports égaux MPT : NGR :: APML : AGHL. Mais MPT=APML (*art.* 36.) donc NGR=AGHL.

COROLLAIRE III.

38. Il suit encore de ce qui précede que le triangle NQH est égal au parallélogramme TMQR; car nous avons trouvé (*Art.* 36.) TPM=APML; (& *art.* 37.) NGR=AGHL; donc si l'on soustrait ces deux équations l'une de l'autre, on aura TPM—NGR=APML—AGHL; ôtant encore des restes égaux le trapeze commun DGPM, on trouvera NDTR=DHM; enfin ajoutant de part & d'autre le quadrilatère DMQN, on aura TMQR=NQH.

THÉOREME IV.

39. *Les quarrés* $\overline{NQ}^2$, $\overline{nq}^2$ *des ordonnées* NQ, nq *à un même diametre sont entr'eux comme les abscisses* MQ, Mq *correspondantes à ces ordonnées.* Fig. 10.

DÉMONSTRATION.

Par les extrémités N, *n*, des ordonnées NQ, *nq* soient menées des perpendiculaires NH, *nh* au diametre MQ prolongé s'il est nécessaire. De plus, soient aussi prolongées les mêmes ordonnées, s'il en est besoin jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'axe aux points R, *r*; les triangles NQH, *nqh* étant formés par des lignes paralleles seront semblables; & chacun sera respectivement égal aux parallélogrammes correspondans TMQR, TM*qr* (*art.* 38); d'ailleurs dans les triangles semblables les quarrés des lignes homologues sont entr'eux comme ces triangles; donc $\overline{NQ}^2 : \overline{nq}^2$ :: NQH : *nqh*, & à cause de l'égalité de ces triangles aux parallélogrammes correspondans..... ......NQH : *nqh* :: TMQR : TM*qr*. On a encore...... ....TMQR : TM*qr* :: MQ : M*q*, parce que ces mêmes parallélogrammes étant compris entre paralleles sont entr'eux comme leurs bases.

Donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été

interrompue, on aura cette analogie $\overline{NQ^2} : \overline{nq^2} :: MQ :$ Mq. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

40. Si l'on cherche une droite MS que nous désignerons par π qui soit troisieme proportionnelle à une abscisse quelconque & à l'ordonnée correspondante ; cette ligne sera le parametre du diametre MQ : & le quarré d'une ordonnée quelconque sera égal au produit de son abscisse par ce même parametre. Car soit x & y, l'abscisse & l'ordonnée dont π est la 3eme proportionnelle ; on aura donc $x : y :: y : \pi$; donc $yy = \pi x$, mais on vient de voir que les quarrés des ordonnées sont comme les abscisses correspondantes ; donc si l'on imagine une autre ordonnée Y, dont l'abscisse soit X, on aura $YY : yy :: X : x$, & en multipliant les deux derniers termes par π, on aura $YY : yy :: \pi X : \pi x$; or, dans cette derniere proportion $yy = \pi x$ par hypothese ; donc aussi $YY = \pi X$. Donc l'équation de la parabole rapportée à ses diametres est précisément la même que celle de cette courbe considérée par rapport à son axe.

COROLLAIRE II.

41. Il suit encore de-là que le parametre π d'un diametre quelconque est égal à celui de l'axe, plus quatre fois l'abscisse AP correspondante à l'ordonnée PM menée par l'origine du diametre sur le même axe. C'est-à-dire, que l'expression du parametre d'un diametre quelconque sera toujours $\pi = p + 4x$. Pour s'en convaincre, par le sommet A de la parabole soit menée l'ordonnée AZ au diametre MQ ; on aura par le Théorême dernier $\overline{AZ^2} = MZ \times \pi = AP \times \pi$; puisque $MZ = AT$ à cause des paralleles AZ, MT, & que $AT = AP$, à cause de la tangente MT. Mais on a dans le triangle rectangle MPT ; $\overline{MT^2}$ ou $\overline{AZ^2} = \overline{PM^2} + \overline{PT^2}$; donc $AP \times \pi = \overline{PM^2} + \overline{PT^2}$; & en mettant les valeurs algébri-

ques de ces lignes $xx\pi = px + 4xx = p + 4x \times x$; donc en divisant chaque membre par x, on aura $\pi = p + 4x$.

COROLLAIRE III.

42. Donc le parametre π d'un diametre quelconque est quadruple de la distance FM de son origine M au foyer F de la parabole, ou de la distance du même point M à la directrice; car on a vû (*art.* 28) que FM = FT = AF $\left(\frac{p}{4}\right)$ + AT (x)(*art.* 25 & 27); donc 4FM = $p + 4x = \pi$, par le corollaire précédent; d'où il suit évidemment que le parametre de l'axe est le plus petit tous les parametres.

COROLLAIRE IV.

43. Si l'on prend sur le diametre une abscisse MQ = MF ou FT = $\frac{1}{4}\pi$ (*art.* 42). L'ordonnée correspondante sera $\sqrt{\frac{1}{4}\pi\pi}$, ou $\frac{1}{2}\pi$; d'où il suit évidemment que la double ordonnée à un diametre quelconque & qui passe par le foyer est égale au parametre de ce diametre, ainsi qu'on l'a déja démontré pour l'axe (*art.* 26). La parabole est la seule dans laquelle cette proposition convienne également à l'axe & aux diametres.

THÉOREME V.

44. *Si par les extrémités* M, N *de deux ordonnées* MP, NQ *à un diametre quelconque on fait passer une sécante* NM *prolongée s'il est nécessaire jusqu'à ce qu'elle rencontre le diametre ou son prolongement en un point* R, *je dis que l'on aura toujours* $\overline{AR}^2 = AP \times AQ$. Fig. 11

DÉMONSTRATION.

Soit fait AR = a; AP = x, AQ = t; RP sera $a + x$, & RQ sera $a + t$; cela posé à cause des triangles semblables RPM, RQN, on aura $\overline{RP}^2 : \overline{RQ}^2 :: \overline{PM}^2 : \overline{QN}^2 ::$ AP:

AQ; (*art.* 38), donc en mettant les valeurs analytiques $\overline{RP}^2$ $(aa+2ax+xx)$: $\overline{RQ}^2$ $(aa+2at+tt)$ :: AP (x) : AQ (t). Donc en faisant le produit des extrêmes & des moyens, on trouvera $aat+2atx+txx=aax+2atx+ttx$: ôtant de part & d'autre $2atx$ & transposant, il vient $aat-aax=ttx-txx$, ou bien $aa\times\overline{t-x}=tx\times\overline{t-x}$; donc $aa=tx$; c'est-à-dire, que $\overline{AR}^2=AP\times AQ$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

45. Si l'on imagine que les droites MP, NQ se meuvent parallelement à elles-mêmes jusqu'à ce qu'elles se réunissent en une seule M′P′, la sécante NMR deviendra la tangente M′T; les lignes AP, AQ deviendront chacune égale à AP′; mais la proportion subsiste toujours; on aura donc $AT^2=AP'\times AP'$; donc $AT=AP'$; d'où il suit qu'une sou-tangente P′T prise sur un diametre quelconque, sera toujours double de l'abscisse correspondante à l'ordonnée menée par le point de contingence. Donc la formule générale des sou-tangentes pour l'axe ou pour un diametre sera toujours $PT=2x$.

COROLLAIRE II.

Fig. 12. 46. Il suit de cette proposition que si par l'extrémité M d'une même ordonnée & les extrémités *N*, *n*, *n′* de plusieurs ordonnées QN, *qn*, *q′n′*, on fait passer différentes sécantes NM, *n*M, *n′*M qui rencontrent le diametre aux points R, *r*, *ρ*, les quarrés des lignes AR, A*r*, A*ρ* seront entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes AQ, A*q*, A*q′* par la constante AP, ou plutôt comme ces mêmes abscisses, en divisant par la même constante. Donc, si l'on transporte ces lignes AR, A*r*, A*ρ* que nous nommerons les *sou-sécantes* sur les ordonnées QN, *qn*, *q′n′* en QS, *qs*, *q′s′*. La courbe qui passera par tous ces points, & que l'on pourroit nommer la *courbe des sou-sécantes*, sera une parabole qui auroit l'abscisse AP pour parametre.

COROLLAIRE III.

47. La proposition seroit encore vraie si la sécante

MN coupoit le diametre au-dedans de la parabole, ce qui arrive en prenant l'ordonnée QN de l'autre côté du même diametre en QN'. La démonstration ne différe pas de celle du Théorême. Fig. 11.

THÉOREME VI.

48. *Si l'on inscrit dans un segment parabolique un triangle* MAm, *dont le sommet* A *soit à l'origine du diametre qui divise* Mm *en deux parties égales; ce triangle sera le plus grand de tous ceux qu'on peut inscrire de la même maniere dans le segment parabolique.* Fig. 13.

DÉMONSTRATION.

Par le point A soit menée la tangente AL, cette ligne sera parallele à l'ordonnée MP*m* (*art.* 34). Donc tout point de la courbe différent de A sera au-dessous de la même tangente, d'où il suit évidemment que le triangle MA*m* est le plus grand qu'on puisse inscrire dans le segment proposé. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

49. Donc pour inscrire pareillement dans les segmens ANM, A*nm* les plus grands triangles possibles; il n'y a qu'à mener par les milieux F, *f* des cordes AM, A*m* les diametres FN, *f n* & tirer dans chaque segment les droites AN, MN; A*n*, *mn* aux origines N, *n* de ces mêmes diametres.

COROLLAIRE II.

50. Il suit de-là que le triangle MPA est quadruple du triangle ANM; pour le démontrer, par les points N, F soient menées les droites NQ, FG paralleles à l'ordonnée PM & terminées au diametre AP. Puisque DF est parallele à AP & passe par le milieu de AM, les droites NQ, GF seront moitié de l'ordonnée MP: de plus les abscisses AP, AQ étant comme les quarrés des ordon-

nées correspondantes, on aura AP : AQ :: $\overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2$ :: 4 : 1; puisque MP est double de NQ, comme on vient de le faire voir. Donc les triangles égaux ANF, MNF pris ensemble vaudront le triangle AFG, puisque ce triangle a son sommet entre mêmes paralleles & que sa base AG est double de NF. D'ailleurs, il est visible à l'inspection de la figure que le triangle APM vaut quatre fois le triangle AFG; donc aussi le même triangle APM = 4ANM, puisque ANM = ANF + MNF.

THEOREME VII.

Fig. 13. 51. *La surface d'un segment parabolique* MNA*nm est les deux tiers d'un parallélograme* MLlm *circonscript, fait sur la double ordonnée* MPm *& l'abscisse* AP.

DÉMONSTRATION.

On vient de voir que le triangle ANM est le quart du triangle AMP. On fera voir de même que la somme des plus grands triangles possibles MRN, N*r*A inscrits dans les petits segmens MRN, N*r*A est aussi le quart du triangle ANM. Donc on peut concevoir la surface du segment parabolique remplie d'une infinité de triangles de cette espèce qui décroissent tous dans la raison de 4 à 1; donc, si l'on représente la surface du triangle AMP par 1, la quadrature du demi-segment parabolique dépendra de la sommation de cette progression géométrique décroissante à l'infini, 1 : $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{64}$, &c. Cette somme se trouvera par la formule $s = \frac{aa}{a-b}$ donnée *, en faisant $a = 1$ & $b = \frac{1}{4}$; ce qui donne $s = \frac{4}{3}$ ou le segment AMNP = $\frac{4}{3}$ du triangle AMP = $\frac{2}{3}$ du parallélogramme ALMP; donc en doublant le demi-segment ANMP & le parallélogramme ALMP, on aura MNA*nm* = $\frac{2}{3}$ ML*lm*. *C. Q. F. D.*

* Art. 40. des Equations; Elém. de M. Rivard.

COROLLAIRE.

52. Donc le demi-complément parabolique ANML = $\frac{1}{3}$ ALPM; puisque le segment ANMP est les $\frac{2}{3}$ du même parallélogramme.

SCHOLIE.

53. Il suit de tout ce qu'on vient de voir, que toutes les propriétés de la parabole sont constamment les mêmes; si l'on considere cette courbe par rapport à son axe, ou par rapport à son diametre. Ainsi l'on peut concevoir une parabole rapportée à l'un quelconque de ses diametres, comme ayant été formée d'une autre parabole considérée par rapport à son axe, & qui auroit le même parametre, dont toutes les ordonnées se feroient également inclinées sur cet axe devenu diametre; cette courbe a encore un grand nombre d'autres propriétés également intéressantes, mais que les bornes de cet abrégé ne nous permettent pas d'exposer.

CHAPITRE III.

Des propriétés de l'Ellipse, considérée sur un plan.

DÉFINITION DE CETTE COURBE.

54. *Soit sur un plan une ligne droite* Aa *donnée de grandeur & deux points fixes* F, f, *sur cette même ligne à égale distance de ses extrémités.* L'ellipse *est une courbe telle que la somme* FM + fM *des distances de chaque point* M *aux deux points* F, f, *que nous nommerons les* foyers; *est constamment égale à la droite donnée* Aa, *que nous appellerons* l'axe *de cette même courbe.* Fig. 14.

COROLLAIRE.

55. Il suit de cette définition, qu'on peut aisément

décrire l'ellipse d'un mouvement continu, en attachant aux foyers F, f les extrémités d'un fil fMF égal à l'axe Aa, que l'on tient toujours tendu au moyen d'un style M que l'on fait mouvoir de A vers a, soit au-dessus soit au-dessous de l'axe Aa. Il est encore évident que les extrémités de l'axe Aa sont des points de la courbe; car lorsque le style décrivant M est arrivé en A ou en a, on a toujours AF+Af, ou aF+af=Aa. De plus, il suit encore de-là que la courbe deviendra un cercle lorsque la distance Ff des foyers sera nulle; car dans ce cas toutes les distances FM seront égales entr'elles, & à la moitié de l'axe Aa.

DÉFINITIONS.

56. 1re. Les extrémités A, a de l'axe Aa sont appellés *sommets* de la courbe. 2me. Le point C milieu de l'axe est le *centre*. 3me. Une droite BCb perpendiculaire au grand axe Aa terminée de part & d'autre à l'ellipse, & qui passe par le centre est appellée le *petit axe* ou le *second axe*. 4me. Une droite quelconque MP ou MQ menée d'un point M de la courbe perpendiculairement à l'un des axes est une *ordonnée* ou *appliquée* au même axe. 5me. Les parties AP, aP, ou BQ, bQ d'un axe formées par la rencontre de cet axe & de son ordonnée quelconque, sont les *abscisses* ou les *coupées* de ce même axe. 6me. Une ordonnée & ses abscisses correspondantes sont appellées en général *co-ordonnées*. 7me. Une troisieme proportionnelle aux deux axes s'appelle *parametre* de celui qui occupe le terme de la proportion.

SCHOLIE.

57. Nous ferons dans la suite de ce Chapitre le grand axe Aa=$2a$; le second axe Bb=$2b$, la distance Ff des foyers =$2c$, le parametre du grand axe $2p$, & celui du petit axe 2π. Le premier se détermine en faisant cette analogie $2a : 2b :: 2b : 2p$, & le second par celle-ci:

$2b : 2a :: 2a : 2\pi$; d'où il suit que les parametres du demi-grand axe & du demi petit axe seront p ou π. Nous supposerons pareillement les indéterminées $CP = x$, & $PM = y$. D'où il suit que les abscisses AP, *a*P seront l'une $a + x$, & l'autre $a - x$, lorsque le point P tombera dans la partie C*a*, & au contraire AP sera $a - x$, & *a*P sera $a + x$ lorsque le point P tombera sur la partie CA. Dans cette supposition de l'origine des x au centre C, on peut aussi regarder le même point C comme l'origine des abscisses. Si l'on regarde comme positifs les CP ou les x qui vont de C vers a, ceux qui iront vers l'extrémité opposée A de l'axe, seront les x négatifs. Il faut encore bien remarquer que dans cette même supposition les ordonnées PM au grand axe sont égales aux abscisses CQ du petit axe ; & de même les abscisses CP du grand axe sont égales aux ordonnées QM au petit, & réciproquement. Quelquefois aussi nous supposerons l'origine des x en A ou en a à l'un des sommets de la courbe, & dans ce cas l'une des abscisses AP étant x, l'autre abscisse *a*P sera $2a - x$. En général, il est bon de sçavoir que tout point fixe sur le plan d'une courbe pourroit être pris pour l'origine des co-ordonnées ; mais il étoit naturel de la fixer ici au centre ou à l'un des sommets de la courbe, parce que ces points sont les plus remarquables, & parce qu'ils donnent plus de facilité dans les calculs.

THEOREME I.

58. *Le demi-petit axe* BC *est moyen proportionnel entre les distances* AF, aF *d'un foyer* F *aux extrémités du grand axe.* Fig. 14.

DÉMONSTRATION.

Puisque l'on a CF ou $Cf = c$, & CA ou $Ca = a$; AF sera $a + c$, & *a*F sera $a - c$; il faut donc démontrer que $a + c : b :: b : a - c$; ou que $bb = aa - cc$.

Par construction, BC est perpendiculaire au milieu de Ff, & de plus le point B est un des points de l'ellipse, donc les droites BF, Bf tirées de ce point aux foyers F, f, seront égales entr'elles & à la moitié du grand axe Aa; donc $Bf=a$; cela posé à cause du triangle-rectangle BCf, on aura $\overline{BC}^2=\overline{Bf}^2-\overline{Cf}^2$, ou en mettant les valeurs analytiques $bb=aa-cc$, d'où l'on tire $a+c : b :: b : a-c$. *C. Q. F. D.*

THEOREME II.

Fig. 14. 59. *Le quarré* $\overline{PM}^2$ *d'une ordonnée quelconque* PM *au grand axe est au rectangle* $AP \times aP$ *de ses abscisses, comme le quarré* $\overline{CB}^2$ *du demi-petit axe, est au quarré* $\overline{CA}^2$ *du demi-grand axe; ou, ce qui revient au même, l'on aura pour chaque ordonnée* $yy : aa-xx :: bb : aa$.

DÉMONSTRATION.

Du point M extrémité de l'ordonnée PM soient menées aux foyers F, f les droites MF, Mf, & de ce point comme centre avec le rayon MF soit décrite une portion de cercle qui coupe l'axe en deux points F, G & la droite fM aussi en deux points K, D. Par la formation de l'ellipse on a $fM+MF=2a$, donc aussi $fM+MD$ ou $fD=2a$. Donc si l'on divise cette ligne en deux également en L, on aura fL ou $LD=a$; d'où il suit que $fK=2LM$; car $fK=fD$ ou $2LD-2MD$, au lieu que $LM=LD-MD$. On fera voir de même que $fG=2CP$ $(2x)$, car $fG=fF-FG=2CF-2FP$, & $CP=CF-FP$. Cela posé, à cause des sécantes fD, fF extérieures au cercle, on aura cette proportion fD $(2a)$: fG $(2x)$ :: fF $(2c)$: fK ou $2LM=\frac{2cx}{a}$, & en divisant tout par 2; $a : x :: c : \frac{cx}{a}$; si l'on prend en même tems la somme & la différence des antécédents & des consé-

quents, on aura ces deux proportions.

$$\begin{cases} a : x :: a+c : x+\frac{cx}{a} \\ a : x :: a-c : x-\frac{cx}{a} \end{cases}$$

; faisant encore ~~pour chacune~~ un *componendo* (pour la premiere) & un *dividendo* (pour la seconde), on aura

$$\left.\begin{array}{l} a : a+x :: a+c : a+c+x+\frac{cx}{a} = fM+fP \\ a : a-x :: a-c : a-c-x+\frac{cx}{a} = fM-fP \end{array}\right\}$$

car $fM = FL\ (a) + LM\ \left(\frac{cx}{a}\right)$ & $fP = FC\ (c) + CP\ (x)$; donc en multipliant ces deux dernieres proportions par ordre, on aura $aa : aa-xx :: aa-cc : (fM+fP)\times(fM-fP) = \overline{fM}^2 - \overline{fP}^2 = \overline{PM}^2$ à cause du triangle-rectangle fPM. Donc en mettant au lieu de $aa-cc$, bb qui lui est égal (*art.* 58) & yy pour $\overline{PM}^2$, puis faisant un *alternando* & *invertendo*, on aura $yy : aa-xx :: bb : aa$. C. Q. F. D.

COROLLAIRE I.

60. Il suit de-là que les quarrés des ordonnées au premier axe sont entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes, puisque la raison des yy à $aa-xx$ est toujours égale à la raison constante de bb à aa ; c'est-à-dire, que si PM & Qm sont deux ordonnées quelconques à cet axe dont les abscisses soient AP, aP ; AQ, aQ, on aura $\overline{PM}^2 : \overline{Qm}^2 :: AP\times aP : AQ\times aQ$.

COROLLAIRE II.

61. De la proportion $yy : aa-xx :: bb : aa$, on en déduit $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, ou $\overline{aa-xx}\times\frac{bb}{aa}$, équation qui exprime d'une maniere générale toutes les propriétés des co-ordonnées de l'ellipse rapportée à son premier axe, en supposant, comme on le fait ici, que l'origine des x

est au centre C. Si dans cette équation l'on suppose $x=0$, on aura $yy=bb$ ou $y=\pm b$, d'où il suit, comme on le sçait par avance, que l'ordonnée BC qui passe par le centre soit au-dessus, soit au-dessous de l'axe est égale au demi petit axe. Si l'on suppose $x=\pm a$, on aura $y=0$, ce qui montre encore que l'ellipse coupe son axe à ses deux extrémités. Si l'on suppose $x=\pm c$ on aura $yy=bb-\frac{bbcc}{aa}=\frac{aabb-bbcc}{aa}$ ou $\frac{b4}{aa}$ en mettant bb au lieu de $aa-cc$; donc $y=\pm\frac{bb}{a}$. Mais de la proportion dont on s'est servi pour déterminer le parametre $a:b::b:p$, il s'ensuit que le demi-parametre de l'axe est égal à $\frac{bb}{a}$, donc la double ordonnée à l'axe qui passe par l'un ou l'autre foyer est égale au parametre du premier axe.

COROLLAIRE III.

62. De la proportion qui donne le parametre $a:b::b:p$, on tire $aa:bb::a:p$, ou $bb:aa::p:a$; donc si dans l'équation $yy=\overline{aa-xx}\times\frac{bb}{aa}$ on met ce rapport de bb à aa, elle deviendra $yy=ap-\frac{pxx}{a}$; l'on appelle cette égalité l'équation au parametre. Elle peut servir à trouver par le calcul tous les points de l'ellipse de même que l'équation aux axes.

THEOREME III.

63. *Le quarré* $\overline{MQ}^2$ *d'une ordonnée* MQ *au second axe* Bb *est au rectangle* BQ×bQ *ou* $\overline{CB}^2-\overline{CQ}^2$ *de ses abscisses, comme le quarré* $\overline{CA}^2$ *du demi-grand axe* CA, *est au quarré* $\overline{CB}^2$ *du demi-petit axe* CB.

DÉMONSTRATION.

L'équation $yy=bb-\frac{bbxx}{aa}$ en dégageant xx, donne

$xx = \overline{bb - yy} \times \frac{aa}{bb}$, d'où l'on tire xx ($\overline{MQ^2}$) : $bb - yy$ ($BQ \times bQ$ ou $\overline{CB^2} - \overline{CQ^2}$) :: aa ($\overline{CA^2}$) : bb ($\overline{CB^2}$). C. Q. *F. D.*

COROLLAIRE I.

64. Donc les quarrés des ordonnées au second axe, sont aussi entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes. Car la raison du quarré d'une ordonnée quelconque au rectangle de ses abscisses, est constamment égale à celle des quarrés du demi-grand axe & du demi-petit axe.

COROLLAIRE II.

65. De la proportion $b : a :: a : \pi$ donnée à l'art. 57. pour déterminer le parametre du demi-petit axe, on tire $bb : aa :: b : \pi$, ou $aa : bb :: \pi : b$; mais on a pour une ordonnée quelconque QM au second axe $xx : bb - yy :: aa : bb$; donc on aura aussi $xx : yy - bb :: \pi : b$, d'où l'on tire une équation au parametre pour le second axe $xx = \pi b - \frac{\pi yy}{b}$, qui peut servir à décrire la courbe comme les équations précédentes.

COROLLAIRE III.

66. On a trouvé (*art.* 62) que l'équation au parametre pour une ordonnée quelconque PM au premier axe est $yy = ap - \frac{pxx}{a}$. D'où il suit que le quarré d'une ordonnée quelconque est égal au rectangle du demi-grand axe par son parametre p, moins un rectangle semblable à celui-ci qui est toujours représenté par la quantité $\frac{pxx}{a}$; car il est visible que l'on a cette analogie $a : p :: x : \frac{px}{a}$, donc les côtés x & $\frac{px}{a}$ du rectangle $\frac{pxx}{a}$ sont proportionnels à ceux a & p du rectangle ap; donc ces deux

rectangles sont semblables. Il faut faire le même raisonnement pour les ordonnées au second axe dont l'équation $xx = \pi b - \frac{\pi yy}{b}$ est combinée de la même maniere que la premiere.

PROBLEME I.

67. *Une ellipse* AM*a & ses foyers* F, f *étant donnés, il faut mener une tangente à la courbe par un point* M *aussi donné.*

SOLUTION ET DÉMONSTRATION.

Fig. 15. Du point M aux deux foyers F, f on menera les droites MF, Mf; du même point comme centre on décrira une portion de cercle qui coupera f M prolongée autant qu'il sera nécessaire dans un point D auquel on menera FD. Ensuite par le milieu E de cette ligne & le point donné M, on fera passer une droite ME, qui sera la tangente que l'on demande.

Pour s'en convaincre, il suffira de démontrer que le point M est le seul qui puisse appartenir à la droite ME & à l'ellipse. Par construction ME est perpendiculaire sur le milieu de FD. Donc elle passe par tous les points à égale distance de D & de F; donc si d'un point quelconque m différent de M on tire les droites mf, MF, mD, on aura mF$=$$m$D; donc en ajoutant mf de part & d'autre $mf+m$F$=$$mf+m$D, mais à cause du triangle fmD, $mf+m$D$>$$f$D qui est égal au grand axe Aa, par construction; donc aussi $mf+m$F$>$ Aa; d'où il suit évidemment que le point m ne peut être à l'ellipse. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

68. Il suit de-là que la tangente EM forme des angles égaux FME, fMe d'un même côté avec les lignes tirées du point de contingence M aux foyers. Car fMe=DME qui lui est opposé au sommet; & le même angle EMD=

EMF

EMF à cause des lignes égales MD, MF; ED, FD (construction). Donc si l'un des foyers F est un point lumineux, tous les rayons partis de ce point & réfléchis par le contour de la courbe passeront nécessairement par l'autre foyer. Cette propriété est encore vraie dans le cercle; comme on le sçait déja par les Elémens.

COROLLAIRE II.

69. Il suit encore de-là que si par le centre C l'on mene au point E milieu de FD la droite CE, & une autre droite CH parallele à la tangente MT, on aura CE ou MH égale à la moitié du grand axe Aa. Car les droites Ff, FD étant coupées chacune en deux également, l'une en C l'autre en E, les triangles CFE, fFD seront semblables; donc on aura CF : CE :: fF : fD; mais CF est moitié de fF, donc aussi CE ou MH, à cause du parallélogramme CHME, sera égale à la moitié de fD, qui est égale à Aa, par construction.

COROLLAIRE III.

70. Il est encore aisé de voir que cette construction auroit aussi lieu dans le cas où il faudroit mener une tangente à l'ellipse d'un point m donné hors de cette courbe. Pour cela, ayant tiré du point donné m aux foyers f, F les droites mf, mF; avec l'une de ces droites mF, comme rayon, on décriroit du centre m une portion de cercle indéfinie vers D; ensuite du foyer f avec un rayon fD$=aA$ on décriroit une nouvelle portion de cercle qui couperoit la premiere dans un point D, auquel on meneroit du foyer F la droite FD: enfin par le point donné m & le milieu E de FD on tireroit la droite mE qui couperoit fD dans un point M, & toucheroit l'ellipse en ce point. Cette construction porte sa démonstration avec elle. De plus, il est visible qu'on peut faire une semblable opération en se servant du rayon mf, comme du rayon mF; ce qui donneroit une autre tan-

gente qui passeroit aussi par le point m, & qui toucheroit l'ellipse dans la partie aB.

DÉFINITIONS.

71. 1ere. Si par le point M où la droite MT touche l'ellipse, on éleve une perpendiculaire MR à cette tangente qui soit terminée à l'axe en R, cette droite sera nommée la *perpendiculaire* ou la *normale* correspondante au point M. 2eme. La partie RP de l'axe comprise entre l'extrémité R de la normale & l'extrémité P de l'ordonnée, s'appelle *sou normale* ou *sou-perpendiculaire*. 3eme. La partie MT de la tangente comprise entre le point de contact M & le point T où elle rencontre l'axe prolongé se nomme *tangente*. 4eme. On donne pareillement le nom de *sou-tangente* à la partie PT de l'axe comprise entre l'extrémité P de l'ordonnée PM qui passe par le point M & la rencontre T de l'axe par la tangente MT.

PROBLEME II.

72. *Trouver l'expression analytique de la sou-normale* PR.

SOLUTION.

Fig. 15. Les droites MR, FD étant chacune perpendiculaire à la tangente MT (construction) seront paralleles. Donc les triangles fFD, fRM seront semblables & donneront fD $(2a)$: fF $(2c)$ :: fM $\left(a+\frac{cx}{a}\right)$ (*art.* 59) : fR $=\frac{aac+ccx}{aa}$. Si de $fP=c+x$ on ôte fR, on trouvera RP $=\frac{aax-ccx}{aa}=\frac{\overline{aa-cc}\times x}{aa}$, ou en mettant bb pour $aa-cc$, RP $=\frac{bbx}{aa}=\frac{px}{a}$ en faisant usage du parametre du premier axe. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

73. De l'équation $RP = \frac{bbx}{aa}$, on tire cette proportion $aa : bb :: x : RP$, ou $\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 :: CP : RP$, d'où il suit que l'abſciſſe CP ſera toujours plus grande que la ſou-normale PR tant que CA ſera plus grand que CB; donc le point R ne coïncide jamais avec le centre C, dans la même ſuppoſition. Au contraire, lorſque les axes ſeront égaux, comme il arrive dans le cercle, on aura toujours CP=RP, & par conſéquent toutes les perpendiculaires aux tangentes d'un cercle doivent paſſer par le centre C.

COROLLAIRE II.

74. Si l'on fait $x = a$, l'expreſſion $\frac{bbx}{aa}$ devient $\frac{bb}{a} = p$. D'où il ſuit que lorſque le point P tombe ſur le point A, la ſou-normale eſt égale au parametre du demi-grand axe; & par conſéquent la courbure de l'ellipſe en ce point eſt égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon ce même parametre. Nous donnerons dans la ſuite le moyen de déterminer la courbure de l'ellipſe en un point quelconque.

PROBLEME III.

75. *Trouver l'expreſſion analytique de la ſou-tangente* PT. Fig. 15.

SOLUTION.

Le triangle RMT étant rectangle en M (par conſtruction) & la droite PM une perpendiculaire abaiſſée du ſommet de l'angle droit ſur la baſe, on aura RP : PM :: PM : PT; donc $PT = \frac{\overline{PM}^2}{RP} = \frac{\overline{aa - xx} \times \frac{bb}{aa}}{\frac{bbx}{aa}} = \frac{aa - xx}{x}$.

C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

76. De l'équation $PT = \frac{aa - xx}{x}$, on tire cette proportion CP (x) : AP ($a - x$) :: aP ($a + x$) : PT. Donc on aura *componendo*, CP (x) : CP + AP (a) :: aP ($a + x$) : aP + PT ou AC + CT (a + CT) ; faisant le produit des extrêmes & des moyens dans cette proportion, on trouvera cette équation $ax + x \times CT = aa + ax$, d'où l'on tire en effaçant ax de part & d'autre, & divisant par x, $CT = \frac{aa}{x}$. On trouveroit aussi la même valeur de CT en ajoûtant x à l'expression de PT ; donc on aura encore cette proportion CP (x) : CA (a) :: CA (a) : CT.

COROLLAIRE II.

77. On peut faire usage de cette derniere proportion pour mener une tangente à l'ellipse par le moyen de l'axe, lorsque l'on ne connoît pas les foyers. Pour cela, du point M donné sur la courbe par lequel on veut mener une tangente, on menera l'ordonnée MP à l'axe, dont l'abscisse sera CP ; ensuite on cherchera une troisieme proportionnelle CT à cette abscisse CP & au demi-axe CA. Par l'extrémité T de cette ligne & le point M on fera passer une droite MT, qui sera évidemment tangente en M, puisque l'on aura CP : CA :: CA : CT.

COROLLAIRE III.

78. Si de $CT = \frac{aa}{x}$ on ôte $CA = a$, on aura $AT = \frac{aa}{x} - a = \frac{aa - ax}{a}$ ou $\frac{\overline{a - x} \times a}{x}$; d'où l'on tire encore cette proportion CP (x) : CA (a) :: AP ($a - x$) : AT $\left(\frac{\overline{a - x} \times a}{x}\right)$; qui pourroit encore servir à déterminer les tangentes pour un point quelconque M.

COROLLAIRE IV.

79. Puisque l'on a la valeur algébrique des lignes RP, PM, PT ; il sera facile de trouver les expressions analytiques de la normale MR, de la tangente MT & celles des lignes CR, AR ou aR & RT. 1°. Le triangle-rectangle RPM donne $MR = \sqrt{PM^2 + RP^2} = \sqrt{bb - \frac{bbxx}{aa} + \frac{b^4x^2}{a^4}}$. 2°. Le triangle-rectangle MPT donne pareillement $MT = \sqrt{MP^2 + PT^2} = \sqrt{\frac{\overline{aa-xx} \times bb}{aa} + \frac{\overline{aa-xx}^2}{xx}}$, ou en réduisant tout au même dénominateur ; $MT = \frac{\sqrt{\overline{aa-xx} \times \overline{bbxx - a^2x^2 + a^4}}}{ax}$. 3°. Si de CP ($x$) on ôte RP $\left(\frac{bbx}{aa}\right)$ on trouvera $CR = \frac{\overline{aa-bb} \times x}{aa} = \frac{ccx}{aa}$, puisque $cc = aa - bb$. 4°. Si de AC (a) l'on ôte CR, & si à cette même ligne AC ou aC on ajoute CR, on trouvera AR ou aR $= \frac{a^3 \mp a^2x \pm bbx}{aa}, = \frac{a^3 \mp ccx}{aa}$.

5°. Enfin si de CT $\left(\frac{aa}{x}\right)$ (*art.* 76), l'on ôte CR ; on trouvera $RT = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{a^2x}$ ou encore $RT = \frac{a^4 - c^2x^2}{aax}$.

COROLLAIRE V.

80. Si l'on se sert du parametre dans l'expression des lignes que l'on vient de chercher, on trouvera 1°. $MR = \sqrt{ap - \frac{pxx}{a} + \frac{p^2x^2}{aa}}$. 2°. $MT = \frac{\sqrt{\overline{aa-xx} \times \overline{px^2 - ax^2 + a^3}}}{\sqrt{ax^2}}$. 3°. $CR = x - \frac{px}{a}$ ou $\overline{a-p} \times \frac{x}{a}$. 4°. AR ou aR $= a \mp x \pm \frac{px}{a}$ ou $\frac{aa \mp ax \pm px}{a}$. 5°. $RT = \frac{a^3 + px^2 - ax^2}{ax}$.

PROBLEME IV.

Fig. 15. 81. *Supposant que par le point* M, *on ait mené l'ordonnée* MQ *au petit axe* CB *& prolongé la normale* MR *jusqu'à ce qu'elle rencontre le petit axe en* r, *il faut trouver l'expression analytique de la sou-normale* Qr *prise sur le petit axe* Bb.

SOLUTION.

Les triangles semblables RPM, MQ*r*, donnent cette proportion RP $\left(\frac{bbx}{aa}\right)$: PM (y) :: QM (x) : Qr = $\frac{aay}{bb}$ ou $\frac{\pi y}{b}$, en faisant usage du parametre π du demi-petit axe. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE

82. Il suit de l'expression Qr = $\frac{aay}{bb}$, que l'on aura cette proportion pour une sou-normale quelconque prise sur le second axe. $bb : aa :: y$: Qr, ou $\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2 ::$ CQ : Qr. Donc puisque $\overline{CB}^2$ est toujours plus petit que $\overline{CA}^2$, l'abscisse CQ sera aussi toujours plus petite que la normale Qr ; & par conséquent le point r sera toujours au-delà du centre C par rapport au point Q. De plus, si l'on fait $y = b$, ou, ce qui revient au même CQ = CB, on aura Q$r = \pi$; d'où il suit encore que la courbure de l'ellipse en B est égale à celle d'un cercle qui auroit pour rayon le parametre π du demi-petit axe.

PROBLEME V.

83. *Supposant toujours l'ordonnée* MQ *au second axe, & la tangente* MT *prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le demi-petit axe en* t, *il faut trouver l'expression de la sou tangente* Qt *prise sur le petit axe.*

SOLUTION.

Les triangles-rectangles semblables rQM, MQt donnent $Qr : QM :: QM : Qt$; ou en mettant les valeurs analytiques $\frac{aay}{bb} : x :: x : Qt = \frac{xx \times bb}{aay}$. Mettant pour xx sa valeur $\overline{bb - yy} \times \frac{aa}{bb}$ trouvée (*art.* 63.), on aura $Qt = \frac{bb - yy}{y}$. C. Q. F. T.

COROLLAIRE I.

84. Si l'on ajoute CQ (y) à Qt $\frac{bb - yy}{y}$ on trouvera $Ct = \frac{bb}{y}$; d'où il suit qu'on a aussi pour le second axe CQ (y) : CB (b) :: CB (b) : $Ct = \left(\frac{bb}{y}\right)$; proportion qui peut encore servir à mener les tangentes par le moyen du petit axe.

COROLLAIRE II.

85. Connoissant les expressions analytiques des lignes rQ, QM, Qt, il sera facile de trouver celles de la tangente Mt de la normale Mr terminées au second axe, ainsi que celles des lignes Cr, Br ou br & tr. Nous ne détaillerons pas les opérations qu'il faut faire pour les trouver. Il suffira pour les Commençans de trouver les résultats qui suivent. 1°. $Mt = \sqrt{a^2y^2 + b^4 - bbyy} \times \sqrt{\frac{bb - yy}{by}}$.
2°. $Mr = \frac{a}{bb}\sqrt{b^4 - b^2y^2 + a^2y^2}$. 3°. $Cr = \frac{aay - bby}{bb} = \frac{ccy}{bb}$.
4°. Br ou $br = \frac{b^3 \pm a^2y \mp bby}{bb}$ ou $\frac{b^3 \pm ccy}{bb} = b \pm \frac{ccy}{bb}$. 5°. $tr = \frac{b^4 + a^2y^2 - b^2y^2}{bby} = \frac{bb}{y} + \frac{ccy}{bb}$.

COROLLAIRE III.

86. Si l'on fait usage du parametre π du second axe ; on trouvera en mettant dans les expressions précédentes $b\pi$ au lieu de aa ; 1°. $Mt = \sqrt{b\pi y^2 + b^4 - bbyy} \times \frac{\sqrt{bb-yy}}{by}$. 2°. $Mr = \sqrt{b\pi - \frac{\pi y^2}{b} + \frac{\pi^2 y^2}{b^2}}$. 3°. $Cr = \frac{\pi y}{b} - y$. 4°. Br ou $br = b \pm \frac{\pi y}{b} \mp y$. 5°. $tr = \frac{bb}{y} - y + \frac{\pi y}{b}$, ou $\frac{b^3 + \pi y^2 - by^2}{by}$.

SCHOLIE.

87. Il n'est pas besoin de faire observer que les calculs qu'on vient de faire pour trouver les expressions des lignes PR, PT, MR, MT ; CR, CT ; AR, AT ou aR, aT & leurs homologues sur le petit axe, ont rapport à la supposition de l'origine des x au centre C. Si l'on avoit fixé l'origine des x à tout autre point de l'axe, les mêmes lignes auroient eu des expressions différentes sans changer de valeur absolue. Nous ne nous arrêterons pas davantage sur cette matiere, d'autant que l'on verra dans le Chapitre cinquiéme les expressions algébriques de toutes ces lignes, en supposant l'origine des abscisses à l'un des sommets de la courbe. Toutes les propriétés qu'on a examinées jusqu'ici ont rapport à l'ellipse considérée relativement à ses axes ; dans le reste de ce Chapitre nous allons faire voir que toutes ces propriétés ont aussi lieu par rapport aux diametres de cette courbe ; on appelle *diametre* une ligne droite qui passe par le centre, & qui se termine de part & d'autre à l'ellipse. Pour faciliter, autant qu'il est possible, cette partie de la théorie de l'ellipse, nous ferons usage du rapport de cette courbe avec un cercle décrit sur son grand ou sur son petit axe. De plus, afin de donner à nos démonstrations toute la rigueur géométrique, nous commencerons par établir le Lemme suivant, qui nous a paru absolument nécessaire.

LEMME.

88. *Si par les extrémités d'une droite* PQ *partent deux droites quelconques* PM, QN *paralleles entr'elles, & par les mêmes points deux autres droites* PR, QS *aussi paralleles entr'elles & proportionnelles aux deux premieres; les droites* MN, RS *qu'on fera passer par les points* M, N; R, S *étant prolongées autant qu'il sera nécessaire, rencontreront la droite* PQ *aussi prolongée, s'il en est besoin, dans un seul & même point* A. Fig. 16.

DÉMONSTRATION.

Supposons pour un instant que la droite MN rencontre la droite PQ dans un point A, & que la droite RS rencontre la même droite PQ dans un autre point B; il est visible que tout se réduit à prouver que les points A, B coïncident; ou, ce qui revient au même, que AP=BP. Puisque les droites PM, QN sont paralleles ainsi que les droites PR, QS, les triangles APM, AQN; BPR, BQS seront semblables.

Les 1ers. donnent AP : AQ : : PM : QN . . . .
& par hypothèse . . . . PM : QN : : PR : QS ,
& à cause des 2ds. triangles BPR, BQS . . . PR : QS : : BP : BQ. Donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura AP : AQ : : BP : BQ. Donc *dividendo* AP : AQ—AP : : BP : BQ—BP, ou AP : PQ : : BP : PQ; donc AP=BP, puisque les deux conséquents PQ & PQ sont égaux. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE.

89. La ligne PQ étant une ligne quelconque peut être supposée aussi petite que l'on voudra, ainsi la proposition seroit encore vraie quand même cette ligne seroit infiniment petite. Il n'est pas moins évident que la position des lignes PM, QN; PR, QS relativement

à la droite PQ ne fait rien à la vérité de la proposition ; tout dépend de leur parallélisme, & de leur proportionalité.

THEOREME IV.

Fig. 17. 90 *Ayant décrit un cercle sur l'un des axes d'une ellipse donnée ; si par un même point de l'axe commun on éleve une ordonnée au cercle & à l'ellipse ; je dis que chaque ordonnée de l'ellipse est à l'ordonnée correspondante du cercle, comme le demi-axe qui n'est pas commun, est au demi-axe commun.*

DÉMONSTRATION.

Soit un cercle $aNDA$ décrit sur le grand axe, & soient prolongées toutes les ordonnées PM, PM de l'ellipse jusqu'à la rencontre du cercle en N, N. Soit pareillement décrit un autre cercle $BEbe$ sur le petit axe Bb, & soient prolongées les ordonnées QN, QN de ce cercle jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'ellipse en M, M. Il faut démontrer 1°. que $PM : PN :: CB : CA$. 2°. Que $QM : QN :: CA : CB$.

On a vû ci-devant (*art.* 59) que $\overline{PM}^2 : AP \times aP :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$; mais à cause du cercle $aNDA$, $aP \times AP = \overline{PN}^2$, donc $\overline{PM}^2 : \overline{PN}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$ & tirant les racines $PM : PN :: CB : CA$. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. On a aussi démontré (*art.* 63). Que $\overline{QM}^2 : BQ \times bQ :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; mais, par la propriété du cercle $BNEbe$, $BQ \times bQ = \overline{QN}^2$, donc on aura $\overline{QM}^2 : \overline{QN}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$, & tirant les racines $QM : QN :: CA : CB$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE.

91. Il suit de cette proposition, qu'on peut regarder l'ellipse comme un cercle dont toutes les ordonnées ont

été allongées ou accourcies proportionnellement dans un rapport constant. Lorsque l'axe commun au cercle & à l'ellipse est le grand axe de l'ellipse, alors cette courbe a été formée par les ordonnées du cercle raccourcies dans le rapport du demi-petit axe au demi-grand axe. Au contraire, lorsque l'axe commun au cercle & à l'ellipse est le petit axe de cette courbe, alors il faut concevoir que l'on a augmenté toutes les ordonnées du cercle dans le rapport du petit axe au grand axe de l'ellipse ainsi formée.

DÉFINITION.

92. Supposant toujours un cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse, si l'on mene dans ce cercle deux diametres quelconques gG, *lL* perpendiculaires l'un sur l'autre, & par les extrémités L, G de ces diametres les perpendiculaires LI, GK à l'axe CA, lesquelles rencontrent l'ellipse aux points F, E; les droites CF, CE menées du centre C aux mêmes points seront nommées *diametres correspondans* par rapport aux diametres Gg, *l*L du cercle. Ces mêmes droites considérées dans l'ellipse seront nommées *diametres conjugués*. Fig. 18.

93. De même ayant mené par un point quelconque N de la circonférence d'un cercle, une ordonnée NQ au diametre CG & par les extrémités QN de cette ordonnée les perpendiculaires QR, NS à l'axe commun, dont la premiere rencontre l'ellipse en M, & la seconde coupe le diametre CF en P; si par les points M, P on tire la droite MP cette ligne sera une *ordonnée* au diametre CE. Les ordonnées PM, QN déterminées comme on vient de l'expliquer dans le cercle & dans l'ellipse, seront nommées *ordonnées correspondantes*. V. [illegible]

COROLLAIRE.

94. Il suit de cette définition 1°. Que les ordonnées correspondantes PM, QN coupent l'axe commun dans Fig. 18.

un même point O, car à cause des paralleles QR, GK on a QR : PR :: GK : EK, & par la propriété de l'ellipse......... GK : EK :: NS : MS ; dont on aura QR : PR :: NS : MS ; donc puisque ces lignes paralleles entr'elles, par construction, sont aussi proportionelles, les droites PM, QN qui passent par leurs extrémités couperont la droite AC dans un même point O. (Lem. *art.* 88). 2°. Il suit encore de la même définition que l'ordonnée PM de l'ellipse est parallele au diametre CF ; car les lignes CL, QN étant paralleles par construction, ainsi que les lignes LI, NS les triangles CIL, OSN seront semblables & donneront CI : OS :: IL : NS ; mais par la propriété de l'ellipse IL : NS :: IF : MS ; donc on aura CI : OS :: IF : MS ; donc les triangles rectangles CIF, OSM sont semblables, & par conséquent CF & MP sont des lignes paralleles. *C. Q. F. D.*

THEOREME V.

Fig. 18. 95. *Le quarré* $\overline{PM}^2$ *d'une ordonnée* PM *à un diametre quelconque* CE *de l'ellipse est au rectangle* EP×eP *ou* $\overline{CE}^2 - \overline{CP}^2$ *des abscisses correspondantes, comme le quarré* $\overline{CF}^2$ *du demi-diametre conjugué* CF, *est au quarré* $\overline{CE}^2$ *du demi-diametre* CE *sur lequel on prend les abscisses.*

DÉMONSTRATION.

Les triangles CFL, OMN, OPQ étant formés de lignes paralleles sont semblables & donnent OM : OP :: ON : OQ :: CF : CL ; donc on aura *componendo* OM + OP : ON + OQ :: CF : CL, ou en réduisant MP : NQ :: CF : CL ; donc en quarrant chaque terme & alternant cette proportion $\overline{MP}^2 : \overline{CF}^2 :: \overline{NQ}^2 : \overline{CL}^2$; mais par la nature du cercle $\overline{NQ}^2 : \overline{CL}^2 :: \overline{CG}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CG}^2$; & à cause des triangles semblables CQP, CGE ; on aura

$\overline{CG}^2 - \overline{CQ}^2 : \overline{CG}^2 :: \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CE}^2$; donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue on aura $\overline{MP}^2 : \overline{CF}^2 :: \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CE}^2$; ou *alternando* $\overline{MP}^2 : \overline{CE}^2 - \overline{CP}^2 :: \overline{CF}^2 : \overline{CE}^2$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

96 donc les propriétés des ordonnées aux diametres sont précisément les mêmes que celles des axes; donc si l'on nomme un diametre quelconque $2a$, son conjugué $2b$; une abscisse quelconque prise du centre sur l'un des diametres conjugués, x; l'ordonnée correspondante y, & p le parametre du diametre sur lequel on prend les abscisses; on aura toujours cette analogie $yy : aa - xx :: bb : aa :: p : a$; d'où l'on tire les équations aux diametres conjugués, & au parametre; l'une $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$, l'autre $yy = ap - \frac{pxx}{a}$ qui expriment d'une maniere générale la nature & les propriétés de l'ellipse considérée par rapport à ses axes ou par rapport à ses diametres, en supposant l'origine des x au centre de la courbe. Si l'on prenoit l'origine des x à l'une des extrémités d'un diametre; alors l'une des abscisses étant représentée par x, l'autre sera nécéssairement $2a - x$, & le rectangle des abscisses sera $2ax - xx$; donc on aura $yy : 2ax - xx :: bb : aa :: p : a$; d'où l'on tire deux nouvelles équations $yy = \overline{2ax - xx} \times \frac{bb}{aa}$, & $yy = 2px - \frac{pxx}{a}$, qui expriment également la nature de l'ellipse.

COROLLAIRE II.

97. donc on peut considérer une ellipse rapportée à ses diametres comme ayant été formée d'une autre ellipse qui auroit eu les mêmes diametres pour axes, en sorte que l'un de ses axes & toutes les ordonnées qui

lui ſont paralleles ſe ſeroient également inclinées ſur l'autre axe & d'un même côté pour former l'ellipſe dont on auroit les deux diametres conjugués.

COROLLAIRE III.

98. Donc pour mener une tangente MT à un point M d'une ellipſe dont on a deux diametres conjugués CE, CF il n'y a qu'à mener par le point M une ordonnée MP à l'un de ces diametres, chercher enſuite une droite CT troiſieme proportionnelle à CP & à CE & mener la droite MT par le point donné M & l'extrémité T de cette troiſieme proportionnelle. Car on peut regarder une tangente comme une droite qui paſſe par les extrémités des deux ordonnées infiniment proches; donc tant que les ordonnées ſeront les mêmes, quelque ſoit leur inclinaiſon ſur la ligne des abſciſſes, la tangente rencontrera toujours cette même ligne des abſciſſes à la même diſtance du centre; ſuivant ce qui a été dit (*art.* 89). Donc déſignant toujours l'abſciſſe CP priſe du centre par x, l'expreſſion de la ſou-tangente PT ſera toujours $\frac{aa-xx}{x}$. De même celle de la partie du diametre compriſe entre le centre & la rencontre de la tangente ſera $\frac{aa}{x}$. En un mot, toutes les lignes dont la détermination ne dépend point de la conſidération des angles, auront les mêmes expreſſions, tant pour les diametres que pour les axes. D'où il ſuit que l'expreſſion de la normale, de la ſou-normale, de la tangente ne ſera pas la même pour un diametre & pour les axes, parce que l'on a eu égard dans ce cas à l'angle droit que les ordonnées font avec leurs axes.

COROLLAIRE IV.

99. Si les diametres CG, CL correſpondans aux diametres conjugués CE, CF de l'ellipſe font un angle

de 45 degrés avec l'axe commun, les abſciſſes CK, CI deviendront égales dans ce cas, ainſi que les diametres conjugués. Donc alors l'équation à l'ellipſe $yy = bb - \frac{bbxx}{aa}$ deviendra celle-ci, $yy = aa - xx$ qui eſt la même que celle du cercle. Ainſi pour qu'une courbe ſoit un cercle, il ne ſuffit pas que les quarrés des ordonnées ſoient égaux aux produits de leurs abſciſſes; il faut encore de plus que les ordonnées faſſent un angle droit avec leur diametre. Il ſuit encore de-là qu'il ne peut y avoir que deux diametres conjugués égaux dans l'ellipſe, puiſqu'il n'y a que deux diametres correſpondans dans le cercle qui faſſent un angle demi-droit avec l'axe commun. Il eſt aiſé de voir que l'abſciſſe qui donne les demi-diametres conjugués égaux eſt égale à $CA \times \sqrt{\frac{1}{2}}$.

THEOREME VI.

100. *Si des extrémités* M, N *de deux diametres conjugués on mene à un autre diametre quelconque* CA *qui paſſe entre les deux premiers, les ordonnées* PM, QN; *je dis que l'on aura* $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$; *ou* $\overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2 = \overline{CP}^2$. Fig. 19.

DÉMONSTRATION.

Soit fait $AC = a$; $BC = b$; $CP = x$; $CQ = z$, & ſoit menée la tangente TM*t* terminée aux diametres conjugués CA, CB; il faut prouver que $zz = aa - xx$, ou que $xx = aa - zz$.

Les triangles ſemblables TPM, CQN donnent $\overline{PT}^2 : \overline{CQ}^2 :: \overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2$, & par la propriété de l'ellipſe on a ...... $\overline{MP}^2 : \overline{NQ}^2 :: \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2$. Donc $\overline{PT}^2 : \overline{CQ}^2 :: \overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2 - \overline{CQ}^2$, & analytiquement $\frac{\overline{aa - xx}^2}{xx} : zz :: aa - xx : aa - zz$. Multipliant les deux premiers termes par xx & diviſant les deux antécédents par $aa - xx$. Cette proportion devient $aa -$

$xx : zzxx :: 1 : aa - zz$; donc $zzxx = aa - xx \times aa - zz$ ou $zzxx = a^4 - aaxx - aazz + zzxx$; d'où effaçant ce qui se détruit, transposant & divisant tout par aa, il viendra $aa - xx = zz$, ou $xx = aa - zz$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

101. Si des extrémités M, N des mêmes diametres on abaisse des ordonnées MR, NS sur le diametre CB conjugué au diametre CA; on fera de même voir que $\overline{CS}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CR}^2$, & que $\overline{CR}^2 = \overline{CB}^2 - \overline{CS}^2$. Donc si l'on suppose que les demi-diametres CA & CB soient les axes de l'ellipse, les triangles CPM, CQN seront rectangles & l'on en déduira cette égalité $\overline{CM}^2 + \overline{CN}^2 = \overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$; car de l'équation $\overline{CA}^2 - \overline{CP}^2 = \overline{CQ}^2$ on tire $\overline{CA}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2$, & pareillement de l'équation $\overline{CB}^2 - \overline{CR}^2 = \overline{CS}^2$, on déduit $\overline{CB}^2 = \overline{CS}^2 + \overline{CR}^2$; donc en ajoutant ces deux dernieres équations on aura $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 + \overline{CS}^2 + \overline{CR}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2 + \overline{CQ}^2 + \overline{QN}^2$ en mettant à la place des quantités $\overline{CR}^2$, $\overline{CS}^2$, leurs égales $\overline{PM}^2$, $\overline{QN}^2$; mais à cause des triangles rectangles CPM, CQN; $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{PM}^2$ & $\overline{CN}^2 = \overline{CQ}^2 + \overline{QN}^2$; donc on aura cette derniere équation $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{CN}^2$; d'où il suit que dans une ellipse la somme des quarrés de deux diametres conjugués quelconques est égale à celle des quarrés des axes.

COROLLAIRE II.

102. Il est aisé maintenant d'avoir l'expression analytique de deux demi-diametres conjugués quelconques. Car il est visible, à cause du triangle-rectangle CPM, que $\overline{CM}^2 = \overline{CP}^2\ (xx) + \overline{PM}^2 \left(\overline{aa - xx} \times \frac{bb}{aa}\right)$ ou en ré-

duisant

duisant au même dénominateur $\overline{CM}^2 = \frac{a^2b^2 + a^2x^2 - bbxx}{aa}$.
Si de $\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$ ($aa + bb$) l'on ôte $\overline{CM}^2$, on aura $\overline{CN}^2 = \frac{a^4 + b^2x^2 - a^2x^2}{aa}$. Donc $CM = \frac{\sqrt{a^4 + a^2x^2 - b^2x^2}}{a}$ & $CN = \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2x^2 - a^2x^2}}{a}$.

THEOREME VII.

103. *Supposant toujours deux diametres conjugués* CM, CN, *& deux autres diametres conjugués* CA, CB; *dont l'un* CA *passe au-dedans des deux premiers; si l'on mene la tangente* tMT *prolongée autant qu'il sera nécessaire pour qu'elle soit terminée de part & d'autre aux diametres conjugués* CA, CB; *je dis que l'on aura* $MT \times Mt = \overline{CN}^2$. Fig. 19.

DÉMONSTRATION.

Nous venons de trouver dans la derniere proposition $\overline{CQ}^2 = aa - xx$; mais on a aussi $CP \times PT = aa - xx$, car (*art.* 76) $PT = \frac{aa - xx}{x}$ & $CP = x$. Donc $\overline{CQ}^2 = CP \times PT$. De plus à cause des triangles semblables CQN, TPM, MRt, on a ces deux proportions, MT : TP :: CN : CQ & Mt : MR ou CP :: CN : CQ; donc en les multipliant par ordre $MT \times Mt : PT \times CP :: \overline{CN}^2 : \overline{CQ}^2$; mais on vient de voir que $PT \times CP = \overline{CQ}^2$; donc $MT \times Mt = \overline{CN}^2$. *C. Q. F. D.*

PROBLEME VI.

104. *Connoissant deux diametres conjugués* CM, CN *donnés de grandeur & de position, trouver deux diametres aussi conjugués qui fassent entr'eux un angle égal à un angle donné.* Fig. 19. & 20.

SOLUTION.

Fig. 20. Supposons pour un instant le problême résolu & que CA & CB sont les diametres demandés: par le point M soit tirée la tangente TMt qui sera donnée de position puisqu'elle doit être parallele à CN dont la position est supposée déterminée. Soit de plus prolongé le diametre CM en F, en sorte que l'on ait CM : CN :: CN : MF; il est évident que l'on aura $\overline{CN}^2 = CM \times MF$. Mais par le dernier Théorème on a aussi $MT \times Mt = \overline{CN}^2$; donc $MT \times Mt = CM \times MF$; donc les quatre points C, F, T, t doivent appartenir à la circonférence d'un même cercle; ce qui réduit notre Problème à celui-ci.

105. *Une droite* CF *& ses parties* CM, MF *étant données de grandeur & de position, & une autre ligne indéfinie* tMT *donnée seulement de position à l'égard de la premiere; il faut trouver le centre* G *d'un cercle qui passe par les points donnés* C, F *& qui coupe la ligne* Tt *en deux points* T, t *tels que l'angle* TCt *soit égal à un angle donné* qrs, *ce qui se construit comme il suit.*

Par le point D milieu de CF on élevera une ligne droite DL perpendiculaire à cette même ligne & qui rencontre MT en un point L, par lequel & par le point F on menera LF. Par le même point D on menera DE perpendiculaire sur MT & DI qui fasse avec cette même ligne DE un angle EDI égal à l'angle donné, & l'on décrira avec le rayon DI un arc de cercle qui coupe LF dans un point K auquel on tirera DK; enfin par le point F on menera FG parallele à DK, & le point G où cette ligne rencontrera la ligne LD prolongée autant qu'il sera nécessaire sera le centre du cercle demandé. Pour avoir ensuite les points T, t où les diametres demandés coupent la tangente MT, il n'y aura qu'à décrire un cercle du point G comme centre avec le rayon GF, ou avec un rayon Gt en menant par le point G une droite Gt parallele à DI.

DÉMONSTRATION.

Il est aisé de voir que les lignes GF, GT, Gt sont égales; car on a fait par construction GF parallele à DK, & Gt parallele à DI; donc les triangles semblables LDK, LGF; LDI LGt donneront DK : GF :: LD : LG :: DI : Gt; donc puisque les lignes DK, DI sont égales, par construction; les lignes GF, Gt le seront aussi. De plus l'angle TCt est égal à l'angle donné. Pour s'en convaincre il n'y a qu'à tirer GH perpendiculaire sur Tt; cette ligne passant par le centre coupera l'angle TGt en deux également, & de plus sera parallele à DE que l'on suppose aussi perpendiculaire à Tt. Mais à cause des paralleles DI, Gt les

angles tGH, IDE feront égaux entr'eux & à l'angle donné, parce que le dernier IDE a été construit tel; donc aussi TCt sera égal à l'angle donné, puisque cet angle ayant son sommet à la circonférence & étant appuyé sur l'arc TFt aura pour mesure la moitié du même arc, qui est précisément celle de l'angle au centre tGH, *C. Q. F. T. & D.*

SCHOLIE.

106. Si l'on vouloit déterminer sur les lignes Ct, CT la longueur des demi-diametres conjugués CA & CB, il n'y auroit qu'à mener par le point M une ordonnée MP, ou, ce qui revient au même, une parallele à Ct, & prendre ensuite CA moyenne géométrique entre CP & CT. On trouveroit de même la longueur de CB. Si l'on demandoit les axes mêmes de l'ellipse, il est évident que l'angle EDI devient égal à l'angle EDL & par conséquent le point L est le centre du cercle demandé; ainsi la solution de ce cas devient un Corollaire de notre solution générale. La construction de ce dernier cas est précisément la même que celle qu'on trouve dans les Coniques d'*Appollonius* de *Perge*, un des plus anciens Géometres qui ait écrit sur ces courbes. Fig. 19. Fig. 20.

PROBLEME VII.

107. *Trouver l'expression analytique d'une perpendiculaire* CK *abaissée du centre* C *sur la tangente* MT *parallele au diametre* CN *conjugué à celui qui passe par le point touchant* M. Fig. 19.

SOLUTION.

Les triangles semblables MPT, CKT donnent MT : MP :: CT : CK; mais on a trouvé (*art.* 79.) $MT = \sqrt{\frac{aa-xx}{aa}} \times \sqrt{\frac{bbxx-aaxx+a^4}{xx}}$, & $CT = \frac{aa}{x}$ (*art.* 78); donc en mettant ces valeurs algébriques, on aura $\sqrt{\frac{aa-xx}{aa}} \times \sqrt{\frac{bbxx-aaxx+a^4}{xx}} : b\sqrt{\frac{aa-xx}{aa}} :: \frac{aa}{x} : CK = \frac{aab}{\sqrt{bbxx-aaxx+a^4}}$. C. Q. F. T.

THEOREME VIII.

108. *Tous les parallélogrammes circonscrits à une el-* Fig. 19.

me ellipse & formés sur deux diametres conjugués sont égaux entr'eux & au rectangle des axes.

DÉMONSTRATION.

Il est visible que l'aire du parallélogramme formé sur deux diametres conjugués CM, CN est égale au rectangle de CN par CK; mais on a trouvé ci-devant (*art.* 102) $CN = \frac{\sqrt{b^2x^2 - a^2x^2 + a^4}}{a}$ & l'on vient de trouver au dernier Problème $CK = \frac{aab}{\sqrt{bbxx - aaxx + a^4}}$; en multipliant ces quantités algébriques l'une par l'autre, & effaçant ce qui se détruit, on aura $CN \times CK = ab$; ou $CN \times CK = CA \times CB$. *C. Q. F. D.*

THEOREME IX.

Fig. 17. 109. *La surface de l'ellipse est à celle d'un cercle décrit sur son grand ou sur son petit axe, comme le petit axe, est au grand axe, ou comme le grand axe est au petit axe.*

DÉMONSTRATION.

Il n'y a qu'à concevoir l'ellipse *a*MBA & le cercle *a*NDA comme étant formés tous deux d'une infinité d'ordonnées paralleles entr'elles & perpendiculaires à l'axe commun. Le nombre des élémens sera le même de part & d'autre, puisqu'il est mesuré par le même axe commun, & de plus chaque élément PM de l'ellipse est à son correspondant PN dans le cercle, comme CB est à CA; donc la somme des élémens d'une part, ou la surface de l'ellipse, est à la somme des élémens de l'autre ou à la surface du cercle; comme CB est à CA. Donc 1° & C.. On fera voir de même que la surface de l'ellipse est à celle d'un cercle décrit sur son petit axe comme le grand axe est au petit axe. *C. Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE I.

110. Il suit de-là que la surface de l'ellipse est égale à l'aire d'un cercle dont le rayon seroit moyen géométrique entre les deux demi-axes. Soit S la surface du cercle décrit sur CA; *s*, celle de l'ellipse, & CL le rayon moyen entre CA & CB. On vient de voir que S : *s* : : CA : CB, & parce que CL est moyen proportionnel entre CA & CB, on aura cette analogie . . . . CA : CB : : $\overline{CA}^2$: $\overline{CL}^2$, ou en prenant les cercles faits sur ces lignes comme rayons & les désignant par *cercle* CA & *cercle* CL; $\overline{CA}^2$: $\overline{CL}^2$: : *cercle* CA : *cercle* CL; donc on aura S : *s* : : *cercle* CA : *cercle* CL. Mais S = *cercle* CA par hypothèse, donc aussi *s* = *cercle* CL.

COROLLAIRE II.

111. Donc la surface de l'ellipse est très-à peu près égale à $\frac{22}{7}$ du rectangle de ses demi-axes, ou du parallélogramme formé sur deux demi-diametres conjugués. Car on sçait que la surface d'un cercle est égale à $\frac{22}{7}$ du quarré du rayon. On aura donc $S = \frac{22}{7}CA^2$. Donc puisque S : *s* : : CA : CB on aura aussi $\frac{22}{7}CA^2 : s$: : CA : CB d'où l'on tire $s = \frac{22}{7} CA \times CB$. Si l'on vouloit une plus grande exactitude dans la détermination de la surface de l'ellipse, il faudroit employer un rapport de la demi-circonférence au rayon plus exact que celui de 22 à 7. En se servant du rapport de 355 à 113 on auroit $s = \frac{355}{113}$ $CA \times CB$, ou en prenant le rapport de *m* à *n* pour celui du diametre à la circonférence $\frac{n}{m} CA \times CB = s$.

CHAPITRE IV.

Des propriétés de l'Hyperbole considérée sur un plan.

DÉFINITION.

Fig. 21. 112. *SOIT une droite* Aa *divisée en deux également en* C *& deux points* F, f *sur cette même ligne prolongée de part & d'autre aussi à égales distances du point* C *; si l'on cherche une infinité de points* M, *tels que la différence des lignes* fM, FM *menées de chacun de ces points aux points* f, F *soit constamment égale à la ligne* Aa *; la courbe qui passera par cette suite de points sera une* hyperbole.

COROLLAIRE.

113. Il suit de cette définition que la courbe a nécessairement deux branches MA*m*, M*am*; car il est visible qu'on peut trouver du côté de *f* & *a*, une suite de points M, *m* qui aient la même propriété que la suite de points qu'on auroit trouvé vers A & vers F. Ces deux courbes qui se présentent leur convexité l'une à l'autre seront nommées ensemble *hyperboles opposées*.

DÉFINITIONS.

114. 1ere. La ligne A*a* donnée de grandeur & de position sera nommée *axe fini* ou *premier axe* des hyperboles opposées. 2me. Les extrémités A, *a* de cet axe seront nommées *origines* ou *sommets* des mêmes courbes. 3me. Les points F, *f* pris à égale distance des extrémités de l'axe seront les *foyers* des hyperboles opposées. 4me. Le point C milieu de A*a* sera le *centre* des deux courbes. 5me. Une droite indéfinie *b*CB menée

par le centre C perpendiculairement au premier axe A*a* sera *l'axe indéfini* ; & si sur cette même ligne on prend de part & d'autre du centre C les parties CB, C*b* chacune moyenne proportionnelle entre les distances d'un sommet A ou *a* aux deux foyers F, *f*; cette ligne *b*B sera le *second axe fini*, ou simplement le *second axe* des hyperboles MA*m*, *ma*M. 6$^{me.}$ Si d'un point quelconque M de la courbe on abaisse une perpendiculaire MP à l'axe A*a* prolongé autant qu'il sera nécessaire, cette ligne sera une *ordonnée* au même axe. 7$^{me.}$ Les parties AP, *a*P du même axe comprises entre ses extrémités A, *a* & le point P où il est rencontré par l'ordonnée PM, seront nommées les *abscisses* ou *coupées*. 8$^{me.}$ Une ordonnée & les abscisses AP, *a*P qui lui répondent seront désignées également par le mot de *coordonnées*. 9$^{me.}$ Pareillement on nommera *ordonnée au second axe* une droite MQ menée d'un des points de l'hyperbole perpendiculairement au même second axe. 10$^{me.}$ De même aussi les parties BQ, *b*Q du second axe comprises entre ses extrémités & la rencontre de l'ordonnée seront les abscisses correspondantes à cette ordonnée. 11$^{me.}$ Nous donnerons aussi le nom d'*abscisse* aux parties de chaque axe comprises entre le centre C, & la rencontre de cet axe par son ordonnée. D'où il suit que dans ce cas chaque ordonnée ne peut avoir qu'une abscisse, & que les ordonnées d'un axe seront égales aux abscisses de l'autre ; & réciproquement, comme il est évident à cause du parallélogramme CPMQ. 12$^{me.}$ Une troisieme proportionnelle aux deux axes sera nommée *parametre* de celui qui occupe le premier terme de la proportion.

PROBLEME I.

115. *Supposant la définition précédente, il faut décrire une hyperbole ou les deux hyperboles opposées ; ou, ce qui revient au même, il faut trouver tant de points que l'on voudra de chacune de ces courbes.* Fig. 21.

SOLUTION.

De l'un des foyers f comme centre avec un rayon quelconque fG plus grand que fA, on décrira un arc de cercle indéfini mGM : ayant ensuite pris sur l'axe vers C une partie $A\phi = AF$; du point F comme centre avec un rayon égal a ϕG on décrira une nouvelle portion de cercle qui coupera le premier arc en deux points déterminés m, M qui seront à l'hyperbole demandée. Car puisque $A\phi = AF$ on aura $f\phi = Aa$; donc aussi $fG - \phi G = aA$, & par conséquent $fM - FM$ sera aussi égal au premier axe aA, puisque les lignes fM, FM sont par construction égales aux lignes fG, ϕG. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE.

116. Comme on peut prendre le rayon fG si grand que l'on voudra, il suit de-là que chacune des hyperboles est composée de deux branches infinies qui s'éloignent continuellement de l'axe Aa. De plus, il est visible que le point G ne peut pas tomber entre le sommet A & le centre C; car dans ce cas les cercles décrits des points f, F comme centres avec les rayons fG, ϕG ne pourroient plus se couper ni même se toucher en aucun point. Donc les lignes fA & ϕA sont les limites de toutes les lignes fG, ϕG qui servent à décrire chacune des hyperboles; & les points A & a seront par conséquent des points de la courbe à décrire.

AVERTISSEMENT.

117. Nous ferons dans la suite de ce Chapitre le premier axe $Aa = 2a$; CF ou $Cf = c$; ce qui donnera $Af = c + a$ & $AF = c - a$; donc si l'on nomme CB, b; parce que cette ligne est moyenne entre Af & AF, (*art.* 114. *déf.* 5e.) on aura $bb = \overline{a + c} \times \overline{c - a} = cc - aa$. Nous ferons pareillement $CP = x$; en regardant le centre com-

me l'origine des abſciſſes, & l'on aura $aP = x + a$ & $AP = x - a$. Enfin, nous nommerons les ordonnées MP, y. Il eſt viſible que les y expriment les abſciſſes du ſecond axe, tandis que les x expriment les ordonnées au même axe; puiſque MP=CQ & que CP=MQ. Nous nommerons le parametre du demi-grand axe p & celui du demi-petit axe π.

THEOREME I.

118. *Le quarré* $\overline{PM}^2$ *d'une ordonnée quelconque* PM *au grand axe* Aa *eſt au rectangle* AP×aP *ou* $\overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ *des abſciſſes correſpondantes; comme le quarré* $\overline{CB}^2$ *du ſecond demi-axe* CB, *eſt au quarré* $\overline{CA}^2$ *du demi-premier axe* CA. Fig. 21.

Il faut donc prouver que $yy : xx - aa :: bb : aa$.

DÉMONSTRATION.

Du point M aux foyers f, F ſoient menées les droites Mf, MF; & ſoit décrit de ce point comme centre avec le rayon MF un cercle DFGK qui coupera fM prolongée s'il eſt beſoin en deux points D, K & l'axe Aa auſſi prolongé en deux points F, G; tant que l'ordonnée MP ne paſſera pas par le foyer F. De plus ſoit encore diviſée la ligne fD en deux également en L. fL ou LD ſera évidemment égale à CA; & l'on fera voir comme à l'article 58. de l'ellipſe que $LM = \frac{1}{2} fK$ que $CP = \frac{1}{2} fG$. Cela poſé à cauſe du cercle & des ſécantes extérieures fG, fK on a la proportion ſuivante.

$$fD\,(2a) : fG\,(2x) :: fF\,(2c) : fK \text{ ou } 2LM\left(\frac{2cx}{a}\right),$$

donc en diviſant chaque terme par 2; $a : x :: c : \frac{cx}{a}$; donc prenant la ſomme & enſuite la différence des

antécédens & des conséquens on aura ces deux analogies

$$\left\{\begin{array}{l} a : x :: c+a : x+\frac{cx}{a} \\ a : x :: c-a : \frac{cx}{a}-x \end{array}\right\}$$ faisant encore un *componendo* & un *dividendo* pour chacune on trouvera . . . .

$$\left\{\begin{array}{l} a : x+a :: c+a : a+c+x+\frac{cx}{a}=fM+fP \\ a : x-a :: c-a : a-c-x+\frac{cx}{a}=fM-fP. \end{array}\right.$$

Donc en multipliant ces deux dernieres proportions par ordre on aura cette derniere $aa : xx-aa :: cc-aa : \overline{fM}^2-\overline{fP}^2$ de laquelle on tire $yy : xx-aa :: bb : aa$, en mettant yy à la place de $\overline{fM}^2-\overline{fP}^2$, bb à la place de $cc-aa$ qui lui est égal (*art.* 116) alternant la nouvelle proportion & faisant ensuite un *invertendo*. Donc $\overline{PM}^2 : AP \times aP :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

119. Donc les quarrés des ordonnées au grand axe sont entr'eux comme les produits de leurs abscisses; puisque ces quarrés sont au rectangle de leurs abscisses dans la raison constante de $\overline{CB}^2$ à $\overline{CA}^2$.

COROLLAIRE II.

120. De la proportion $yy : xx-aa :: bb : aa$ l'on tire l'équation $yy=\frac{bbxx}{aa}-bb$ qui exprime la nature de cette courbe considérée par rapport à son axe, en comptant l'origine des x au centre C. Si l'on fait $x=\pm a$ l'on trouvera $y^2=0$. D'où il suit que la courbe coupe son axe aux extrémités du même axe, comme nous l'avons déja remarqué. Si l'on fait $x<\pm a$; les valeurs de y deviennent imaginaires, & par conséquent il ne peut y avoir aucun point de la courbe entre le centre & les ex-

trémités de l'axe. Si l'on fait $x = +\infty$ (cette note désigne un grandeur infinie), on aura $+y = \infty$, donc les deux branches de chacune des hyperboles opposées s'éloignent continuellement de leur axe. Si l'on fait $x = \pm c$, on trouvera $yy = \frac{bbcc}{aa} - bb = \overline{cc - aa} \times \frac{bb}{aa}$; donc $yy = \frac{b^4}{aa}$, puisque $bb = cc - aa$; donc $y = \frac{bb}{a}$; c'est-à-dire que dans ce cas l'ordonnée qui passe nécessairement par le foyer, est une troisieme proportionnelle au demi-premier axe est au demi-second axe; & par conséquent égale au demi-parametre.

Théoreme II.

121. *Le quarré* $\overline{MQ}^2$ *d'une ordonnée* MQ *au second axe* Bb *est à la somme* $\overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2$ *des quarrés du demi-axe* CB *& de l'abscisse* CQ; *comme le quarré du demi-axe* CA *est au quarré du demi-axe* CB; *c'est-à-dire, que chaque ordonnée* MQ *au second axe donnera cette proportion*, $\overline{MQ}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$.

Démonstration.

De l'équation $yy = \overline{xx - aa} \times \frac{bb}{aa}$, l'on tire $(yy + bb) \times aa = xx \times bb$; donc on aura cette proportion $xx : yy + bb :: aa : bb$, ou $\overline{MQ}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; car à cause du parallélogramme CQMP, PM = CQ & QM = CP. *C. Q. F. D.*

Corollaire I.

122. Donc les quarrés des ordonnées au second axe sont entr'eux comme la somme des quarrés de ce second demi-axe & de l'abscisse correspondante CQ prise du centre; puisque la raison de $\overline{CA}^2$ à $\overline{CB}^2$ qui exprime la raison du quarré d'une ordonnée à cette même somme, est une raison constante.

COROLLAIRE II.

123. Donc si l'on nomme toujours x une ordonnée extérieure MQ & y l'abscisse CQ ; l'équation $xx = \frac{yy+bb \times aa}{bb}$ sera l'équation de l'hyperbole considérée par rapport à son second axe bB qui pourra servir à la décrire de même que l'équation au premier axe.

COROLLAIRE III.

124. Si les deux demi-axes CA & CB sont égaux l'équation derniere se réduira à celle-ci $xx = yy + bb$; on nomme hyperbole *équilatère* celle qui est désignée par cette équation. D'où il suit qu'on peut aisément décrire cette courbe par le moyen du triangle-rectangle, en prenant toujours sur la droite MQ perpendiculaire au second axe une partie finie MQ égale à l'hypothénuse AQ du triangle-rectangle ACQ.

PROBLEME II.

125. *Trouver les équations au parametre pour une hyperbole considérée par rapport au premier & au second axe, en supposant toujours l'origine des abscisses au centre C.*

SOLUTION.

Puisque le parametre p du premier demi-axe donne cette analogie $a : b :: b : p$ (*art.* 114) on aura aussi $aa : bb :: a : p$. Donc $p : a :: bb : aa$; mais on a pour une ordonnée quelconque PM au premier axe, $yy : xx - aa :: bb : aa$; donc on aura aussi $yy : xx - aa :: p : a$, d'où l'on tire $yy = \frac{pxx}{a} - ap$. *C. Q. F.* 1°. *T.*

De même par la définition du parametre π du second demi-axe, $b : a :: a : \pi$; donc $bb : aa :: b : \pi$ & aussi $aa : bb :: \pi : b$, mais on a pour chaque ordonnée QM au second axe $xx : yy + bb :: aa : bb$; donc on aura encore

$xx : yy + bb :: \pi : b$, donc $xx = \frac{\pi yy}{b} + b\pi$. C. Q. F. 2°. D.

COROLLAIRE.

126. De la proportion $a : b :: b : p$, on tire $ap = bb$; donc $aa + ap = aa + bb$. De même de celle-ci $b : a :: a : \pi$, on tire $b\pi = aa$; donc $b\pi - bb = aa - bb$. Cela posé, si l'on prend sur le premier axe de part & d'autre du centre C une abscisse égale à $\sqrt{aa + ap}$ ou à $\sqrt{aa + bb}$, l'on trouvera $y = p$, en mettant $aa + ap$ pour xx dans l'équation $yy = \frac{pxx}{a} - ap$; de même si l'on prend sur le 2d. axe CB une abscisse $= \sqrt{b\pi - bb}$ ou $\sqrt{aa - bb}$, on trouvera $x = \pi$, en mettant pour yy sa valeur $b\pi - bb$ dans l'équation $xx = \frac{\pi yy}{b} + b\pi$; d'où il suit que pour trouver les parametres p & π des demi-axes, il n'y a qu'à prendre sur le premier une abscisse égale à AB, & sur le second une abscisse égale à l'un des côtés d'un triangle-rectangle dont l'hypothénuse seroit CA, & l'autre côté CB; les ordonnées correspondantes seront les lignes p & π. On ne pourra trouver aucune ordonnée au second axe $= \pi$ lorsque b sera plus grand que a, parce que $\sqrt{b\pi - bb}$ devient imaginaire.

PROBLEME III.

127. *Une hyperbole* MAm, *ses foyers* F, f, *son axe* Aa *& un point quelconque* M *sur cette courbe étant donnés; il faut mener la tangente* MT *à ce même point.*

SOLUTION.

Du point donné M on tirera aux foyers F, f les droites MF, Mf; du même point comme centre avec le rayon FM on décrira un arc de cercle qui coupera la ligne fM dans un point D, auquel on menera FD que l'on divisera en deux également en E; enfin, par ce point E & le point donné M on tirera la droite MET qui sera la tangente demandée. Car par la définition de Fig. 21.

l'hyperbole $fM - FM$ ou $fD = Aa$; mais il est visible que cette propriété ne convient qu'au seul point M. Pour s'en convaincre, d'un point quelconque m de cette ligne différent de M, soient tirées aux points f, D, F, les droites mf, mD, mF. A cause du triangle mDf on a évidemment $mf < mD + fD$; mais $mD = mF$, puisque, par construction, MT est perpendiculaire au milieu de FD ; donc $mf < mF + fD$; donc $mf - mF < fD = Aa$; donc le point m n'est pas à l'hyperbole, puisque la différence des lignes menées de ce point aux deux foyers n'est pas égale au premier axe. Donc la ligne MT est tangente au point M. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE.

128. Il suit de cette proposition que les lignes Mf, MF menées d'un même point M aux foyers F, f forment avec la tangente MT & d'un même côté des angles égaux FMT, KMm ; car FMT $= f$MT, par construction ; mais fMT $=$ KMm qui lui est opposé au sommet. Donc un rayon FM parti du foyer F & terminé à la courbe en M sera réfléchi dans ce point suivant une direction KM, dont le prolongement passeroit par l'autre foyer f.

On pourroit faire usage de la solution précédente pour trouver une tangente qui passe par un point m donné hors de la courbe sur le même plan ; comme on l'a fait pour l'ellipse (*art.* 70). Cette même construction peut aussi faire connoître si un point m est au-dedans ou au-dehors de la courbe, ou même s'il est un des points de l'hyperbole.

DÉFINITIONS.

119. 1re. On appelle *sou-tangente* la partie de l'axe comprise entre l'extrémité P de l'ordonnée menée par le point de contingence, & le point T où ce même axe est coupé par la tangente prolongée autant qu'il est nécessaire. D'où il suit évidemment que le partie Qt du second axe sera aussi la *sou-tangente* prise sur ce même

axe. 2$^{me.}$ Une droite MR perpendiculaire à la tangente en M & terminée à l'axe en R, s'appelle *normale* ou *perpendiculaire*. 3$^{me.}$ La partie PR comprise entre l'extrémité P de l'ordonnée PM qui passe par le point de contingence & la rencontre de l'axe par la normale PR, se nomme la *sou-normale* ou la *sou-perpendiculaire*.

PROBLEME IV.

130. *Trouver l'expression analytique de la sou-normale RP prise sur le grand axe.*

SOLUTION.

Les droites MR, FD étant toutes deux perpendiculaires à la tangente MT seront paralleles; donc les triangles fFD, fRM seront semblables; donc fD $(2a)$: fF $(2c)$ :: MD ou MF $\left(\frac{cx}{a}-a\right)$ (*art.* 118) : FR$=\frac{ccx-aac}{aa}$; si de FR l'on ôte FP $(x-c)$ lorsque le point P tombe au-delà de F par rapport à A; ou si l'on ajoûte à FR, FP$=c-x$, dans le cas où P tombe entre A & F, l'on aura la sou-normale PR$=\frac{ccx-aac}{aa}-\frac{aax+aac}{aa}=\frac{\overline{cc-aa}\times x}{aa}$, ou en mettant bb pour $cc-aa$; PR$=\frac{bbx}{aa}$. *C. Q. F. T.*

COROLAIRE I.

131. Donc la sou-normale PR & l'abscisse CP sont toujours dans un rapport constant qui est celui de $\overline{CB}^2$ à CA^2; car de l'équation PR$=\frac{bbx}{aa}$, l'on tire PR : x :: bb : aa ou PR : CP :: $\overline{CB}^2$: $\overline{CA}^2$. Si l'on suppose l'hyperbole équilatère, on aura toujours PR$=$CP; puisque dans cette courbe les demi-axes sont égaux entr'eux. Ainsi la distance du point P au point R est égale à celle du même point P au centre C.

COROLLAIRE II.

132. Il est aisé d'avoir la sou-normale Qr sur le second axe lorsque l'on connoît PR. Les triangles semblables RPM, MQr donnent PR $\left(\frac{bbx}{aa}\right)$: PM (y) :: MQ (x) : Qr $\left(\frac{aay}{bb}\right)$, d'où il est aisé de déduire comme pour le premier axe CQ : Qr :: $\overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$.

PROBLEME V.

133. *Trouver l'expression analytique de de la sou-tangente* PT *prise sur le grand axe.*

SOLUTION.

A cause du triangle-rectangle RMT on a PR : PM :: PM : PT; donc $PT = \frac{\overline{PM}^2}{PR}$, & en substituant dans cette valeur de PT les expressions analytiques de $\overline{PM}^2$ & de PR on trouvera $PT = \overline{xx - aa} \times \frac{bb}{aa} \times \frac{aa}{bbx} = \frac{xx - aa}{x}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

134. Connoissant l'expression analytique de la sou-tangente sur le premier axe, il sera aisé d'avoir celle de la sou-tangente sur le second axe. Car les triangles PMT, QtM sont semblables & donnent, PT : PM :: QM : Qt; & analytiquement $\frac{xx-aa}{x} : y :: x : \frac{xxy}{xx-aa}$; mais (*art.* 123.) $xx = \frac{\overline{yy+bb} \times aa}{bb}$, & $xx - aa = \frac{aayy}{bb}$; mettant ces valeurs de xx & de $xx - aa$, on trouvera $Qt = \frac{\overline{yy+bb} \times aa}{bb} \times \frac{bb}{aayy} \times y$, ce qui réduit à cette nouvelle expression $Qt = \frac{bb+yy}{y}$.

COROLLAIRE II.

COROLLAIRE II.

135. Si de CP (x) on ôte PT $\left(\frac{xx-aa}{x}\right)$ on aura CT$=\frac{aa}{x}$; & de même si de Q$t=\frac{yy+bb}{y}$ on ôte CQ (y), on trouvera C$t=\frac{bb}{y}$. De l'équation CT$=\frac{aa}{x}$ on tire $x:a::a:$CT, ou CP : CA :: CA : CT; pareillement, de l'équation C$t=\frac{bb}{y}$, on tire $y:b::b:\frac{bb}{y}$, ou CQ : CB :: CB : Ct. Il est aisé de voir comment on peut se servir de ces deux proportions pour mener une tangente MTt à un point M donné sur l'hyperbole, par le moyen de l'un des deux axes. Car il est visible qu'il n'y a qu'à mener par le point M une ordonnée MP ou MQ & chercher ensuite sur le premier ou le second axe une troisieme proportionnelle CT ou Ct aux abscisses CP ou CQ & à chaque demi-axe CA ou CB; puis joindre les points M, T ou M & t par la droite tTM qui sera la tangente qu'on demande.

COROLLAIRE III.

136. Si dans l'équation CT$=\frac{aa}{x}$, l'on fait $x=a$, & ensuite $x=\infty$; on trouvera dans le premier cas CT$=$ CA, & dans le second CT$=$o; donc le lieu de tous les points de rencontre de l'axe & de toutes les tangentes qu'on peut mener à l'hyperbole MAm est compris entre le centre C & le sommet A de la courbe. Pareillement, si dans l'expression C$t=\frac{bb}{y}$ on fait $y=$o & $y=\infty$; on trouvera d'abord C$t=\infty$: d'où il suit que la tangente en A & le second axe Bb ne se rencontrent qu'à une distance infinie, & par conséquent sont paralleles; mais le second axe est perpendiculaire au premier; donc aussi

la tangente au sommet A sera perpendiculaire à l'axe A*a*. La seconde supposition de $y=\infty$ donne $Ct=\frac{bb}{\infty}=0$; donc encore dans ce cas la tangente qui répond à une abscisse infinie passe par le centre.

COROLLAIRE IV.

137. Connoissant les lignes RP, PM, PT & CT, il sera facile de trouver l'expression analytique de la normale MR de la tangente MT, des lignes AR, AT, ou *a*R, *a*T, & de CR. 1°. Le triangle-rectangle RPM donne $MR=\sqrt{\overline{MP}^2+\overline{RP}^2}=\sqrt{\overline{xx-aa}\times\frac{bb}{aa}+\frac{b^4x^2}{a^4}}$.

2°. Le triangle-rectangle MPT donne $MT=\sqrt{\overline{PM}^2+\overline{PT}^2}=\sqrt{\overline{xx-aa}\times\frac{bb}{aa}+\overline{\frac{xx-aa}{xx}}^2}=\frac{\sqrt{xx-aa}\times\sqrt{b^2x^2+a^2x^2-a^4}}{ax}$. 3°. Si à PR $\left(\frac{bbx}{aa}\right)$ l'on ajoute AP $(x-a)$ ou *a*P $(x+a)$ on trouvera $AR=\frac{bbx+aax-a^3}{aa}$ & $aR=\frac{bbx+aax+a^3}{aa}$. 4°. Si l'on ôte CT de CA ou si l'on ajoute C*a* à CT on trouvera $AT=a-\frac{aa}{x}=\frac{ax-aa}{x}$, & $aT=\frac{ax+aa}{x}$. 5°. Enfin, si à CP (x) on ajoute PR $\left(\frac{bbx}{aa}\right)$ on trouvera $CR=\frac{aax+bbx}{aa}=\frac{ccx}{a}$, puisque $cc=aa+bb$. (*art.* 117.)

COROLAIRE V.

138. Pareillement puisque l'on a l'expression algébrique des lignes Q*r*, QM, Q*t* & C*t*, il sera facile de trouver, comme dans le Corollaire précédent, la valeur des lignes M*r*, M*t*; B*r*, B*t* ou *br*, *bt* & de la ligne C*r*, prises toutes sur le second axe. 1°. A cause du triangle-rectangle MQ*r*, $Mr=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{Qr}^2}=$

$\sqrt{\overline{bb+yy}\times\frac{aa}{bb}+\frac{a^4y^2}{b^4}}$. 2°. Le triangle-rectangle MQt donne pareillement $Mt=\sqrt{\overline{MQ}^2+\overline{Qt}^2}=\sqrt{\overline{yy+bb}\times\frac{aa}{bb}+\frac{\overline{bb+yy}^2}{yy}}=\sqrt{bb+yy}\times\frac{\sqrt{a^2y^2+b^2y^2+b^4}}{by}$. 3°. Si l'on ajoute BQ ($y-b$) à Qr, ou si l'on ajoute bQ ($y+b$) à la même ligne, on aura Br ou $br=\frac{aay+bby\mp b^3}{bb}$. (Il faudra retrancher BQ de Qr lorsque le point Q tombe entre C & B). 4°. Si l'on ajoute CB à Ct ou si l'on ôte Ct de Cb, lorsque t tombe entre C & b, ou enfin si l'on ôte Cb de Ct, lorsque t est au-delà de b par rapport au centre C, on trouvera Bt ou $bt=\frac{\pm bb\pm by}{y}$. 5°. Enfin si à CQ ($y$) on ajoute Q$r$, on trouvera $Cr=\frac{bby+aay}{bb}=\frac{ccy}{bb}$.

SCHOLIE.

139. De toutes les lignes que l'on vient de chercher il n'y en a aucune dont on ne puisse déduire quelque méthode pour mener les tangentes à l'hyperbole, soit par le moyen du premier, soit par le moyen du second axe ; mais on se contente ordinairement des lignes CT, ou PT, ou AT & aT sur le premier axe ; & de leurs correspondantes sur le second ; parce que ces lignes fournissent les solutions & les constructions les plus simples. Il n'est pas moins évident que l'on pourroit encore trouver de nouvelles expressions algébriques des mêmes lignes en faisant usage du parametre de chacun des axes. Nous ne nous arrêterons pas d'avantage sur cet article : les Commençans ne peuvent mieux faire que de s'appliquer à cette recherche, qui n'a par elle-même aucune difficulté.

Des propriétés de l'Hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes, d'où l'on déduit aussi les propriétés de cette courbe par rapport à ses diametres.

DÉFINITIONS.

140. Une tangente qui ne peut rencontrer une courbe qu'à une distance infinie, s'appelle une *asymptote*.

PROBLEME VI.

141. *Déterminer les asymptotes de l'hyperbole.*

SOLUTION.

Fig. 22. Nous avons déja vû (*art.* 136.) que si dans l'expression de $CT = \frac{aa}{x}$ l'on fait $x = \infty$, CT sera égale à zéro; c'est-à-dire, que le centre C est un point de l'asymptote. Pour en avoir encore un autre, j'éleve par le point A une perpendiculaire AR terminée à une tangente quelconque en R, & je cherche l'expression analytique de cette ligne. Les triangles semblables TPM, TAR donnent PT $\left(\frac{xx-aa}{x}\right)$: PM $\left(\frac{b}{a}\sqrt{xx-aa}\right)$ :: AT $\left(\frac{ax-aa}{x}\right)$: AR que l'on trouvera égale à $\frac{b\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}}$. En divisant les deux premiers termes par $\sqrt{xx-aa}$ &, les deux antécédens par $\frac{\sqrt{x-a}}{x}$. Présentement si dans cette valeur de AR on fait $x = \infty$, le numérateur & le dénominateur de cette fraction deviennent égaux; & la ligne AR devient égale à b, ce qui donne cette construction des asymptotes.
Fig. 22. Par le sommet A de l'une des hyperboles opposées soient prises de part & d'autre de l'axe les parties AD, Ad chacune égale à CB, & perpendiculaire au même axe; ensuite par le centre C & les points

D, *d* soient tirées les lignes CD, C*d* qui seront les asymptotes cherchées. *C. Q. F. T. & D.*

THÉOREME III.

142 *Si par un point quelconque* M *de l'une des hyperboles opposées on mene une droite* GMmF *ou* MGFm, *parallele au second ou au premier axe, & terminée de part & d'autre aux asymptotes en* G & F; *je dis que l'on aura toujours* $MG \times MF = \overline{CB}^2$ *ou* $\overline{AD}^2$, *ou* $MG \times MF = \overline{CA}^2$. Fig. 22.

DÉMONSTRATION.

1°. A cause des triangles semblables CAD, CPG; on aura $\overline{AD}^2 : \overline{PG}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2$; & par la propriété de l'ordonnée PM au premier axe *Aa*, on aura .... $\overline{CB}^2$ ou $\overline{AD}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$. Donc puisque ces deux proportions ont les mêmes antécédens, les conséquens seront aussi en proportion. Donc on aura $\overline{PG}^2 : \overline{PM}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$; & *dividendo* $\overline{PG}^2 - \overline{PM}^2 : \overline{PG}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CP}^2 :: \overline{AD}^2 : \overline{PG}^2$ à cause des triangles semblables CAD, CPG; mais $\overline{PG}^2 = \overline{PG}^2$; donc aussi $\overline{PG}^2 - \overline{PM}^2$ ou $MF \times MG = \overline{AD}^2$. *C. Q. F.* 1°. *D.*

2°. Si la ligne M*m* est parallele au premier axe, à cause des triangles semblables CBD, CQG on aura $\overline{BD}^2 : \overline{QG}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2$, & par la propriété de l'ordonnée extérieure QM, $\overline{CA}^2$ ou $\overline{BD}^2 : \overline{QM}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2$; donc puisque ces deux proportions ont les mêmes antécédens, les conséquens seront aussi en proportion & donneront $\overline{QM}^2 : \overline{QG}^2 :: \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 : \overline{CQ}^2$; donc *dividendo* $\overline{QM}^2 - \overline{QG}^2 : \overline{QG}^2 :: \overline{CB}^2 : \overline{CQ}^2 :: \overline{BD}^2$ ou $\overline{CA}^2 : \overline{QG}^2$; mais $\overline{QG}^2 = \overline{QG}^2$; donc $\overline{QM}^2 - \overline{QG}^2$ ou $MF \times MG = \overline{CA}^2$. *C. Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE.

143. Il suit de cette proposition 1°. que l'hyperbole & son asymptote s'approchent continuellement l'une de l'autre sans jamais pouvoir se toucher; ou, ce qui revient au même, il suit de ce Théorême que la ligne MG ne peut jamais être nulle ou zéro; car dans ce cas on auroit MG×MF, ou $0 = \overline{AD}^2$. Au reste, pour avoir une idée plus juste de cette propriété de l'hyperbole, il n'y a qu'à concevoir que MG diminue nécessairement à mesure que MF augmente. Ainsi lorsque $MG = \frac{1}{\infty}$, alors $MF = \infty$; donc $MG \times MF = \frac{\infty \times 1}{\infty} = 1$ ou $\overline{AD}^2$; puisque l'unité étant indéterminée dans ce cas peut être égale à $\overline{AD}^2$. 2°. Il suit encore de cette proposition que les lignes MG, *m*F, ou *m*G, MF sont toujours égales entr'elles; car on auroit démontré précisément de la même maniere que $mG \times mF = \overline{AD}^2$, & d'ailleurs on a vu ci-devant que les ordonnées PM, P*m* sont aussi égales entr'elles.

THEOREME IV.

Fig. 23. 144. *Si par deux points quelconques* M, N *de l'une des deux hyperboles opposées on mene deux droites quelconques* ML, IN *paralleles entr'elles terminées à l'une des asymptotes, & deux autres droites quelconques* MK, NH *aussi paralleles entr'elles & terminées à l'autre asymptote; je dis que l'on aura toujours* MK×ML=NH×NI.

DÉMONSTRATION.

Par les points M, N soient tirées les droites GMF, *g*N*f* que l'on supposera paralleles au second axe, & terminées aux asymptotes; à cause des paralleles LM, IN; GN, *g*M, les triangles LGM, I*g*N seront semblables & donneront LM : IN :: GM : *g*N; pareillement à cause des

paralleles MF, Nf; MK, NH les triangles MFK, NfH seront aussi semblables & donneront MK : NH :: MF : Nf; donc en multipliant par ordre, on aura LM×MK : IN×NH :: GM×MF : gN×Nf; mais GM×MF = gN×Nf (*art.* 142); donc aussi LM×MK = IN×NH. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

145. Si l'on imagine que les lignes LM, IN tournent autour des points M & N jusqu'à ce qu'elles se confondent avec les droites MK, NH pour devenir M*k*, N*h*, on aura toujours MK× M*k* = N*h*×NH; & si l'on suppose encore que l'une de ces lignes K*k*, par exemple, se meuve parallelement à elle-même jusqu'à ce qu'elle devienne tangente en A; alors les parties AD, A*d* seront égales; puisque les lignes PK, P*k*; M*k*, *m*K le sont toujours. Ainsi, quel que soit l'angle que forment avec l'axe les paralleles K*k*, H*h*, on aura toujours MK× M*k* = NH×N*h* = $\overline{AD}^2$.

COROLLAIRE II.

146. On déduit de ce Théorème une maniere fort simple de mener une tangente à une hyperbole dont on a les asymptotes. Soit A le point dont on cherche la tangente; par ce point & le centre C on tirera une droite AC, & ensuite une droite AE parallele à l'asymptote CF; sur l'autre asymptote on prendra DE = CE; enfin par le point D & le point donné A, on tirera DA*d* qui sera la tangente cherchée; car à cause des paralleles AE, C*d*, les droites CD, D*d* seront coupées en parties proportionnelles; donc D*d* est divisée en deux également en A, puisque CD l'est en E, par construction. Donc DA*d* sera tangente en A, par l'article précédent.

DÉFINITIONS.

147. On appelle *diametres conjugués* de l'hyperbole

Fig. 23. ou des hyperboles opposées, les droites Aa, Dd dont l'une passe par le centre & se termine de part & d'autre aux hyperboles opposées, & dont l'autre Dd touche l'une des hyperboles à l'extrémité de la premiere & va se terminer aux asymptotes. Si l'on mene par le centre C une droite CQ parallele à la tangente en A, & qu'on prenne de part & d'autre du centre C les parties CB, Cb = AD, les droites Aa, Bb seront aussi nommées *diametres conjugués*.

148. Les lignes MPm paralleles à la tangente AD, & terminées à l'une des hyperboles de part & d'autre du diametre sont des doubles *ordonnées à ce diametre*. Il est visible qu'elles sont toutes coupées en deux parties égales par le même diametre prolongé autant qu'il sera nécessaire. Car puisque $AD = Ad$, on aura $PK = Pk$, de plus $Mk = mK$; donc $PM = Pm$. Les parties AP, aP du diametre, comprises entre les extrémités de ce diametre & la rencontre d'une ordonnée sont les *abscisses* correspondantes à la même ordonnée.

COROLLAIRE.

149. Il suit de ce qui précede que si deux diametres conjugués sont égaux dans une hyperbole, tous les autres le seront aussi; & de plus les hyperboles que l'on nomme dans ce cas *équilatères*, auront leurs asymptotes à angles droits. Car puisque l'on suppose $AC = AD$, & que d'ailleurs $CE = DE$; les triangles CEA, DEA qui ont le côté commun AE seront égaux en tout; donc l'angle DEA est égal à l'angle CEA; donc chacun de ces angles est droit puisque ces angles sont de suite; donc aussi les asymptotes sont perpendiculaires l'une à l'autre, puisque Cd est parallele à EA. Il suit encore de-là que toute hyperbole qui n'est pas équilatère ne peut pas avoir de diametres conjugués égaux entr'eux; & réciproquement.

THÉOREME V.

150. *Le quarré $\overline{PM}^2$ d'une ordonnée* PM *à un diametre quelconque* Aa *est au rectangle* $AP \times aP$ *des abscisses correspondantes comme le quarré de* AD *ou de* CB *est au quarré du demi-diametre* CA *sur lequel on prend les abscisses.* Fig. 131

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables CAD, CPk, on aura $\overline{Pk}^2 : \overline{AD}^2 :: \overline{CP}^2 : \overline{CA}^2$; mais (*art.* 144 & 145) $\overline{AD}^2 = MK \times Mk$ ou $\overline{Pk}^2 - \overline{PM}^2$; donc en mettant cette valeur de $\overline{AD}^2$ dans la proportion précédente & faisant un *dividendo* on aura $\overline{Pk}^2 - \overline{AD}^2 = \overline{Pk}^2 - \overline{Pk}^2 + \overline{PM}^2 = \overline{PM}^2 : \overline{AD}^2$ ou $\overline{BC}^2 :: \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2 : \overline{CA}^2$; d'où l'on tire *alternando*, $\overline{PM}^2 : \overline{CP}^2 - \overline{CA}^2$ ou $aP \times AP :: \overline{CB}^2 : \overline{CA}^2$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

151. Donc si l'on nomme AC ou aC, a ; CB ou Cb, b ; CP, x & PM, y ; on aura $yy : xx - aa :: bb : aa$, d'où l'on tire $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$ équation qui exprime la nature de l'hyperbole considérée par rapport à ses diametres, ainsi que par rapport à ses axes ; & qui pourra servir également à la décrire lorsque l'angle des diametres conjugués sera donné.

COROLLAIRE II.

152. Il suit de ce qui précede que les propriétés des diametres conjugués sont précisément les mêmes que celles des axes. Donc on trouvera pour une ordonnée extérieure MQ au second diametre, $\overline{MQ}^2 : \overline{CB}^2 + \overline{CQ}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; car de l'équation $yy = \frac{bbxx}{aa} - aa$ l'on tire

$xx : bb+yy :: aa : bb$. De plus, il suit encore de-là que l'on pourra déterminer les tangentes à un point quelconque M par le moyen d'un diametre CP & de l'ordonnée menée par le même point M à ce diametre, en faisant cette proportion continue CP : CA :: CA : CT; car on peut imaginer qu'une hyperbole rapportée à ses diametres, a été formée d'une autre hyperbole qui auroit ces mêmes diametres pour axes, & dont toutes les ordonnées & le second axe auroient pris une même inclinaison sur le premier; & alors la tangente à la nouvelle courbe doit être déterminée comme auparavant, puisque l'on se trouve dans le cas du Lemme de *l'art.* 88.

Fig. 22.

DÉFINITION.

Fig. 23. 153. Si par le point A extrémité d'un diametre quelconque, on tire les droites AE, Ae paralleles aux asymptotes & terminées à ces mêmes lignes; le parallélogramme CEAe qui en résulte est nommé *puissance* de l'hyperbole.

THEOREME VI.

154. *Si par deux points* M, N *d'une hyperbole ou des hyperboles opposées, l'on mene des droites* MR, ML; NO, NI *terminées aux asymptotes & paralleles à ces mêmes lignes; je dis que l'on aura toujours* $ML \times MR = NO \times NI$.

DÉMONSTRATION.

Cette proposition n'est qu'un cas particulier du quatrieme Théorème, & se démontre précisément de la même maniere. Il n'y a qu'à relire la démonstration de l'*art.* 144, en substituant les triangles MRF, NOf aux triangles MFK, NfH. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

155. Il suit de-là que les parallélogrammes CRML, CONI sont égaux entr'eux & à la puissance de l'hyper-

bole; car ils ont tous un angle égal compris entre côtés réciproques, puisque de l'équation ML×MR=NO×NI=AE×Ae l'on tire ML : NO :: NI : MR ; ML : AE :: Ae : MR, & NO : AE :: Ae : NI.

COROLLAIRE II.

156. Donc si l'on fait les constantes CE=a, EA=b; & les variables CL=x, LM=y; on aura toujours $xy=ab$, ou en cherchant une moyenne géométrique c entre a & b, $xy=cc$, qui est une nouvelle équation à l'hyperbole considérée par rapport à ses asymptotes. De cette équation l'on tire aisément $y=\frac{cc}{x}$, ou $y=ccx^{-1}$. Si l'on fait dans cette formule $x=0$, y devient $\frac{cc}{0}$ qui désigne une grandeur infinie, & dans ce cas elle se confond avec l'asymptote de la courbe. Pareillement si l'on suppose $x=\infty$, on aura $y=\frac{cc}{\infty}$ qui devient une grandeur infiniment petite. Quelquefois on suppose la constante cc égale à l'unité, & l'on exprime l'équation aux hyperboles rapportées à leurs asymptotes par celle-ci $y=x^{-1}$.

COROLLAIRE III.

157. Il est aisé de voir que dans chacun des angles ΔCD, δCd adjacens à l'angle DCd, on peut décrire de nouvelles hyperboles B$\mu\nu$, $\gamma b\phi$ par le moyen des puissances CEB, Ceb égales à la puissance AECe, en prenant sur les lignes ML, NI prolongées autant qu'il sera nécessaire les parties μL, νI égales aux ordonnées ML, NI; ces deux nouvelles hyperboles sont nommées *hyperboles conjuguées* aux deux premieres, & réciproquement les deux premieres sont conjuguées à celles-ci. Comme leur formation est entierement la même, elles ont aussi absolument les mêmes propriétés. Ces quatre

hyperboles seront égales lorsque les axes seront égaux ; ou ce qui revient au même lorsque les asymptotes seront à angles droits ; ou encore lorsque deux hyperboles opposées seront équilatères.

COROLLAIRE IV.

158. Si l'on fait un parallélogramme $\Delta\delta dD$ sur deux diametres conjugués Aa, Bb, il est aisé de voir que la puissance $CEAe$ en sera la huitieme partie ; mais elle seroit aussi la huitieme partie du rectangle des axes ; si l'on supposoit que Aa & Bb fussent les axes des hyperboles opposées. D'ailleurs ces deux puissances différentes sont égales à un parallélogramme quelconque CLMR (*art.* 155). Donc ces puissances sont égales entr'elles ; donc tous les parallélogrammes inscrits aux hyperboles conjuguées, & formés sur deux diametres conjugués sont égaux entr'eux & au rectangle des axes.

CHAPITRE V.

Des propriétés communes aux trois Sections Coniques.

DANS les Chapitres précédens nous avons traité d'abord de la Parabole, & ensuite de l'Ellipse & de l'Hyperbole ; dans celui-ci nous considérerons principalement ces deux dernieres courbes, & nous en déduirons les propriétés de la Parabole, qui participe de l'une & de l'autre, comme on le verra par la suite.

DÉFINITIONS.

Fig. 24. & 25. 159. Soient sur un plan une droite RDT que j'appellerai *directrice*, & un point F hors de la même droite

que je nommerai *foyer*. Si l'on cherche une infinité de points M, M, M, tels que les distances MF, MR au foyer & à la directrice soient continuellement dans un rapport constant, les courbes qui passeront par toutes les suites de points trouvés suivant ces conditions seront nommées des *Sections Coniques*. *

160. Si dans le rapport de MF à MR on suppose toujours MF plus petit que MR, la courbe sera une *ellipse*, laquelle deviendra un *cercle* lorsque MR sera infinie par rapport à MF; parce qu'alors toutes les MF deviennent égales entr'elles.

161. Si MF est toujours plus grande que MR, la courbe sera une *hyperbole*.

162. Si MF est toujours égale à MR, la courbe sera une *parabole*, ce qui rentre dans la description que nous avons déja donnée de cette courbe (*art.* 18).

163. Nous nommerons *axe* de la section ou de la courbe, une droite DF menée par le foyer F perpendiculairement à la directrice. Nous nommerons *sommet* de la courbe ou extrémités de l'axe, les points A & *a* où la courbe MA*m* coupe cet axe.

PROBLEME I.

164. *Connoissant le rapport constant qui doit régner entre les* MF *&* *les* MR; *trouver les sommets de chaque Section Conique, ou, ce qui revient au même, déterminer la longueur de l'axe principal.*

SOLUTION.

Par le point F on menera *l*FL perpendiculaire à l'axe

* Le point de vûe sous lequel on considere ici les trois Sections Coniques est susceptible d'une plus grande généralité, à laquelle je ne crois pas que l'on ait fait attention; au lieu de concevoir le foyer F sur le plan, on peut l'imaginer en l'air; & les points trouvés suivant les mêmes conditions appartiennent toujours à des Sections Coniques. Nous ne nous arrêterons pas à démontrer cette proposition; cela nous écarteroit de notre objet, & nous meneroit trop loin.

FD sur laquelle on prendra une partie FL qui soit à FD dans la raison donnée ; on tirera ensuite la droite indéfinie DL ; & l'on menera par le foyer F deux lignes FG, Fg qui fassent avec l'axe chacune un angle de 45°, & que l'on prolongera jusqu'à ce qu'elles rencontrent la ligne DL en deux points G, g, desquels on abaissera sur l'axe les perpendiculaires GA, *ga* qui donneront les sommets A, *a* que l'on demande. Car à cause des triangles-rectangles isosceles FAG, F*ag*, AF=AG, & *a*F=*ag* ; mais à cause des triangles semblables DFL, DAG, D*ag*, on aura FL : FD : : AG ou AF : AD : ou : : *ag* ou *a*F : *a*D ; c'est-à-dire, que les distances FA, AD ; F*a*, *a*D des points trouvés A, *a* au foyer & à la directrice sont dans la raison constante ; puisque FD, FL sont par construction dans la même raison. *C.Q.F.T.*

COROLLAIRE I.

165. Comme dans la Parabole on a FL=FD (*art.* 162.) la ligne LD fait avec l'axe un angle de 45 degrés. Donc la ligne Fg se trouve parallele à DL. Donc cette courbe ne peut avoir qu'un sommet en A. De plus, si l'on considere deux lignes paralleles comme concourantes à une distance infinie, & que d'ailleurs on n'a pas plus de raison d'imaginer le point de concours d'un côté plutôt que d'un autre, il suit de-là que la parabole peut être mise indifféremment dans le genre elliptique ou dans le genre hyperbolique.

COROLLAIRE II.

166. Donc une Section Conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole, selon que son sommet est plus ou moins ou autant éloigné du foyer que de la directrice.

COROLLAIRE III.

167. Il suit de ce qui précede que de ces trois choses, le foyer F, les sommets A, *a*, & la directrice, deux

étant données, la troisieme sera aussi toujours connue. Car 1°. on vient de voir comment la connoissance du foyer & de la directrice donne les sommets. 2°. Si l'on a la directrice & les sommets A, *a* avec le rapport qui doit régner entre les MF & les MR que l'on suppose toujours connu; par le point A l'on tirera AG qui soit à AD dans ce rapport constant; ensuite on menera DGL, & la droite GF qui fasse avec AG un angle de 45°, & le point F sera le foyer. 3°. Si l'on a les sommets A, *a*, & le foyer F, on élevera à l'axe les perpendiculaires AG=AF, & *ag*=*a*F. Par les extrémités G, *g* de ces droites on tirera *g*G qui rencontrera l'axe en un point D qui sera un point de la directrice.

COROLLAIRE IV.

168. Il suit encore de ce qui précede que dans l'ellipse & dans l'hyperbole on pourra toujours trouver deux foyers F, *f* & deux directrices DR, *dr*; car il n'y a pas plus de raison de prendre AF vers le sommet A, que de prendre *af*=AF vers l'extrémité *a* du même axe; ainsi il est indifférent de prendre l'un ou l'autre; mais le foyer F construit la directrice DR en prenant AD à AF dans la raison donnée qui exprime celle des distances d'un point M de la courbe au foyer & à la directrice; donc aussi l'on pourra trouver une nouvelle directrice *dr* par rapport au sommet *a*, en prenant sur l'axe prolongé s'il est nécessaire, *ad* qui soit à *af* dans la même raison.

PROBLEME II.

169. *Connoissant le grand axe* a A *d'une Section Conique avec le rapport qui doit régner entre les* MF *& les* MR; *trouver l'expression de la distance* AF *du foyer* F *au sommet* A.

SOLUTION.

Soit nommé le grand axe A*a*, *aa*, & soit désigné le

Fig. 24. rapport des MF aux MR par celui de m à n. Enfin, soit fait AF$=x$, aF sera $2a-x$. Puisque le point A est un des points de la courbe on aura $m:n::$ AF (x) : AD $\left(\frac{nx}{m}\right)$. Donc aD sera $2a+\frac{nx}{m}$, & parce que le sommet a est aussi un des points de la courbe on aura encore m : n :: a F $(2a-x)$: aD $\left(2a+\frac{nx}{m}\right)$. Donc $x:\frac{nx}{m}::$ $2a-x:2a+\frac{nx}{m}$. Ou $m:n::\overline{2a-x}\times m:2am+nx$; d'où l'on tire $x=\frac{a\times\overline{n-m}}{n}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

170. Si l'on suppose m plus petit que n comme cela arrive dans l'ellipse, la valeur de x sera positive. Si au contraire m est plus grande que n, comme cela arrive dans l'hyperbole, x devient négatif; & dans ce cas il faut prendre AF sur l'axe prolongé au-delà du sommet A. Enfin, si l'on suppose $m=n$, l'expression $\frac{a\times\overline{n-m}}{n}$ devient $\frac{a\times o}{n}$, ou en faisant $n=1$; $a\times\frac{o}{1}$. Dans ce cas la courbe est une parabole, & la grandeur a est infinie. D'ailleurs $\frac{o}{1}=o$, ou $\frac{1}{\infty}$; donc $x=\infty\times\frac{1}{\infty}=1$. C'est-à-dire, que la distance AF peut toujours être prise égale à l'unité.

PROBLEME III.

171. *Supposant tout ce qui précede, il faut décrire les trois Sections Coniques par une méthode uniforme; ou, ce qui revient au même, il faut trouver tant de points* M, M, m, m *que l'on voudra.*

SOLUTION.

Fig. 24. & 25. Par tant de points P, P, que l'on voudra de l'axe AP, on

on élevera perpendiculairement à cet axe des droites PL, PL prolongées indéfiniment vers *l* & terminées à la droite DGL; ensuite du point F comme centre, avec un rayon égal à chaque PL, on décrira un arc de cercle qui coupera chaque *l*PL en deux points M, *m* qui seront à la section demandée. Pour le prouver, soit abaissée MR perpendiculaire à la directrice DT; on aura MR=PD, & par construction MF=PL; donc MR:MF :: PD : PL; & PD : PL :: AD : AG à cause des triangles semblables LPD, GAD; c'est-à-dire, que les distances MR & MF à la directrice & au foyer sont dans la raison constante pour chaque section, puisque AD, AG ou PD & PL sont dans cette même raison par construction. (*art.* 164.) *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE I.

172. Puisque les lignes PL, PL ou les FM, FM correspondantes qui leur sont égales croissent comme les élémens du triangle *gu*D, il s'ensuit qu'elles sont en progression arithmétique; & par conséquent leur somme à égale distance des sommets A, *a* doit être une grandeur constante & toujours égale à AG+*ag* qui répond aux extrémités de l'axe A*a* & qui lui est égale, par construction (*art.* 162). Dans l'ellipse cette somme sera toujours une vraie somme, parce que les lignes PL, PL se trouvent toujours d'un même côté par rapport à l'axe. Dans l'hyperbole, au contraire, la somme de deux PL prises à égale distance des sommets A, *a* & terminées à une même droite GL sera une vraie différence, parce que l'une de ces lignes est négative, & l'autre positive; à cause qu'elles se trouvent de différens côtés de l'axe A*a*. Fig. 25.

COROLLAIRE II.

173. Si l'on fait attention que dans l'ellipse & dans l'hyperbole chaque point M peut être déterminé par

F

le moyen de la directrice DR & du foyer F & aussi par la directrice $d\,r$ & le foyer f ; on verra que dans l'ellipse la somme des distances MF, Mf & dans l'hyperbole la différence des mêmes lignes est toujours égale au premier axe Aa. Car puisque le point M a été déterminé par le foyer F & la directrice DR, on a $MF = PL$; & parce qu'il a pu être pareillement déterminé par le foyer f & la directrice dr, on aura aussi $Mf = Pl$; donc on aura pour l'ellipse & pour l'hyperbole $Mf \pm MF = Pl \pm PL = Ll$ ou $GE = Aa$, puisque $AG = AF$ & que $AE = aF$.

COROLLAIRE III.

174. Ces deux propriétés se trouvent dans la parabole ; c'est-à-dire, qu'en supposant à cette courbe deux foyers à une distance infinie l'un de l'autre ; tous deux en dedans de cette courbe, comme dans l'ellipse ; ou l'un au-dedans & l'autre au-dehors, comme dans l'hyperbole ; la somme des distances MF, Mf, dans le premier cas, & leur différence, dans le second, sera toujours égale à cet axe qui est infini.

PROBLEME IV.

175. *Connoissant dans l'ellipse & dans l'hyperbole le grand axe* Aa, *que nous nommerons* (2a) *& la distance* AF *du sommet* A *au foyer que nous nommerons* (c) ; *trouver la distance* AD *de l'origine* D *de la directrice au même sommet* A.

SOLUTION.

Soit nommée AD, x ; a D sera $2a \pm x$ (le signe supérieur est toujours pour l'ellipse, & l'inférieur pour l'hyperbole). De plus AF étant c ; AG qui lui est égale (*art.* 164) sera aussi c ; & aF ou ag sera $2a \mp c$; cela posé à cause des triangles semblables DAG, Dag on aura AG : AD :: ag : aD, ou $c : x :: 2a \mp c : 2a \pm x$; d'où l'on tire aisé-

ment $x = \frac{ac}{a \mp c}$. Dans la parabole, comme $a = \infty$, la quantité finie $\mp c$ combinée avec a par addition ou par soustraction n'augmente ni ne diminue le dénominateur qui se réduit à a; donc $x = \frac{ac}{a} = c$, comme on le sçait d'ailleurs. *C. Q. F. D.*

PROBLEME V.

176. *Trouver l'équation aux Sections Coniques en comptant les abscisses* AP (x) *du sommet* A.

SOLUTION.

Les triangles semblables DAG, DPL donnent AD : AG :: DP : PL & analytiquement $\frac{ac}{a \mp c} : c :: \frac{ac}{a \mp c} + x$: PL $= \frac{ac + ax \mp cx}{a}$. D'ailleurs dans tous les cas PF $= \mp x \pm c$ pour l'ellipse & pour l'hyperbole. Donc à cause du triangle-rectangle FPM & de FM=PL, on aura $\overline{PM}^2 = \overline{FM}^2 - \overline{FP}^2$, ou $yy = \frac{ccxx}{aa} \mp \frac{2ccx}{a} \mp \frac{2cxx}{a} + 4cx = \frac{ccxx \mp 2accx \mp 2acxx + 4a^2cx}{aa}$; d'où l'on tire cette nouvelle équation $yy = \frac{\overline{2ax \mp xx} \times \overline{2ac \mp cc}}{aa}$; & en faisant le rectangle connu $2ac \mp cc = bb$; $yy = \frac{\overline{2ax \mp xx} \times bb}{aa}$. *C. Q. F.* 1°. *D.* Fig. 24. & 25.

Si dans la premiere équation $yy = \frac{ccxx}{aa} \mp \frac{2ccx}{a} \mp \frac{2cxx}{a} + 4cx$, on suppose que a soit une grandeur infinie alors tous les termes s'évanouissent, & il ne reste que $4cx$; donc l'équation à la parabole est $yy = 4cx$, ou $yy = 2px$; en faisant $4c = 2p$. *C. Q. F.* 2°. T. & *D.*

N.B. Le parametre entier de l'axe de la parabole que nous avons désigné jusqu'ici par p le sera dans la suite par $2p$; pour conserver l'analogie de cette courbe avec les deux autres, dans lesquelles p n'est que le demi-parametre de l'axe Aa. Ainsi l'équation $yy = px$ devient $yy = 2px$, & de même $px + \frac{1}{4}pp$ se change en $2px + pp$.

COROLLAIRE I.

177. Il suit delà que dans l'ellipse & dans l'hyperbole on aura toujours cette proportion $yy : 2ax \mp xx :: bb : aa$, puisque cette analogie se déduit immédiatement de l'équation $yy = \frac{\overline{2ax \mp xx} \times bb}{aa}$; donc les quarrés des ordonnées seront entr'eux comme les produits des abscisses correspondantes ; car $AP \times aP = 2ax \mp xx$; & d'ailleurs la raison de bb à aa qui exprime le rapport du quarré d'une ordonnée au rectangle $aP \times AP$ est une raison constante. Dans la parabole les quarrés des ordonnées seront entr'eux comme les abscisses. C'est une suite nécessaire de l'équation $yy = 2px$.

COROLLAIRE II.

178. Nous avons vû dans les Chapitres précédens qu'une troisieme proportionnelle aux deux demi-axes, est le parametre de celui qui fait le premier terme de la proportion. Nommant donc p celui du demi-premier axe, on aura $a : b :: b : p$, d'où l'on tire $bb : aa :: p : a$; donc à cause de la proportion $yy : 2ax \mp xx :: bb : aa$, on aura $yy : 2ax \mp xx :: p : a$, & par conséquent $yy = 2px \mp \frac{pxx}{a}$. La fraction $\frac{px}{a}$ donne $a : p :: x : \frac{px}{a}$; donc le rectangle ap fait sur les deux premiers termes de cette proportion, est semblable au rectangle $\frac{pxx}{a}$ fait sur les deux derniers, puisque ces côtés sont proportionnels. Donc *dans une Section Conique quelconque le quarré d'une ordonnée à l'axe principal est par rapport au produit* 2px *de l'abscisse par le parametre entier de cet axe, égal dans la parabole, plus petit dans l'ellipse, & plus grand dans l'hyperbole ; & de plus, dans ces deux dernieres courbes le défaut ou l'excès désigné par* $\frac{pxx}{a}$ *est toujours un rectangle semblable à celui*

(ap) *du demi-premier axe par son parametre, lequel a pour côtés* x & $\frac{px}{a}$. C'est à cause de cette propriété que les anciens ont donné aux trois Sections Coniques, les noms de *Parabole*, *d'Ellipse* & *d'Hyperbole*; qui signifient respectivement *égalité*, *défaut* & *excès*. Ce que l'on vient de dire ici doit aussi s'appliquer aux diametres qui ont même équation que l'axe principal.

COROLLAIRE III.

179. Si l'on suppose $x = c$ ou $2a \mp c$, on aura $yy : 2ac \mp cc :: bb : aa$; mais on a supposé $2ac \mp cc = bb$; donc on aura $yy : bb :: bb : aa$, d'où l'on tire $y = \frac{bb}{a} = p$; donc *dans toute section Conique, la double ordonnée qui passe par l'un ou l'autre foyer est égale au parametre de l'axe principal*; comme nous l'avons vû sur chacune. Si l'on fait $x = \mp a$, on aura $yy : \mp aa :: bb : aa$, d'où l'on tire $yy = \mp bb$. D'où il suit que le quarré de l'ordonnée CB qui passe par le centre est égal au quarré $\mp bb$. Ce quarré est positif dans l'ellipse & donne deux valeurs réelles pour y dans cette courbe; dans l'hyperbole au contraire ce même quarré est négatif & donne pour y deux valeurs imaginaires $\pm\sqrt{-bb}$; parce que les courbes mAM, maM ne peuvent avoir aucune ordonnée réelle pour toutes les abscisses prises entre les extrémités de l'axe Aa. Fig. 24.

COROLLAIRE IV.

180. Si l'on suppose les deux axes de l'ellipse & de l'hyperbole égaux entr'eux; ce qui donnera un cercle dans le premier cas & une hyperbole équilatérale dans le second, le parametre sera aussi égal à l'un ou à l'autre axe & l'équation $yy = 2px \mp \frac{pxx}{a}$ devient $yy = 2px \mp xx$ qui est l'équation à un cercle ou à une hyperbole équilatère; pourvû que l'on suppose, comme on le fait ici, que les ordonnées sont à angles droits pour avoir un cercle.

COROLLAIRE V.

181. Si dans l'équation $yy = \frac{ccxx}{aa} \mp \frac{2ccx}{a} \mp \frac{2cxx}{a} + 4cx$, on suppose $x = c$, on trouvera $yy = \frac{c^4}{aa} \mp \frac{4c^3}{a} + 4cc$. Donc en tirant les racines $y = \frac{cc}{a} \mp 2c$; mais on a vu (*art.* 179) que la double ordonnée qui passe par le foyer F, comme cela arrive ici, est égale au parametre; donc l'expression générale du parametre de l'axe principal d'une Section Conique est $2p = \frac{2cc}{a} \mp 4c$. Dans la parabole à cause de $a = \infty$, le parametre $2p = 4c$.

SCHOLIE.

182. Comme nous avons fait voir dans les Chapitres précédens que les propriétés des diametres conjugués sont précisément les mêmes que celles des axes, nous ne nous arrêterons pas ici à prouver que leur équation doit aussi être la même, en comptant les abscisses de l'origine de chaque diametre.

PROBLEME VI.

Fig. 15. & 21. 183. *Supposant une tangente* MT *à un point* M *d'une Section Conique quelconque; trouver l'expression de la sou-tangente* PT *en comptant les abscisses du sommet* A.

SOLUTION.

Nous avons vu dans les Chapitres précédens (*art.* 76 & 135.) de l'ellipse & de l'hyperbole que l'on a CP : CA :: CA : CT; donc en mettant les valeurs analytiques, on trouvera $a \mp x : a :: a : \frac{aa}{a \mp x} = CT$; donc si dans l'ellipse on retranche CP de CT, ou dans l'hyperbole CT de CP, on aura $PT = \frac{2ax \mp xx}{a \mp x}$. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

184. Connoiſſant l'expreſſion algébrique des lignes PM & PT, il ſera facile de trouver l'expreſſion de la ſou-normale PR & de la normale MR; ainſi que celles de la tangente MT & des lignes AR, aR; AT, aT; en ſe ſervant comme ci-devant des triangles-rectangles TPM, MPR, RMT; on trouveroit donc PR $= \frac{bb}{aa} \times \overline{a \mp x}$, ou en ſe ſervant du demi-parametre p, PR $= \frac{p}{a} \times \overline{a \mp x}, = p \mp \frac{px}{a}$. Donc dans une Section Conique quelconque la *ſou-normale* PR *eſt par rapport au demi-parametre de l'axe principal, plus petite dans l'ellipſe, plus grande dans l'hyperbole & égale dans la parabole*. Car à cauſe de $a = \infty$ dans cette courbe, $\mp \frac{px}{a} = \mp 0$. On trouveroit de même MR $= \sqrt{\frac{a^2b^4 \mp 2ab^4x + b^4x^2 + 2a^2bbx \mp aabbxx}{aa}}$; ou en y faiſant entrer l'expreſſion du demi-parametre MR $= \sqrt{\frac{a^2p^2 \mp 2ap^2x + p^2x^2 + 2a^2px \mp apxx}{a}}$; d'où l'on tirera MR $= \sqrt{2px + pp}$ dans la parabole, en faiſant $a = \infty$.

A cauſe du triangle-rectangle MPT, on a MT $= \sqrt{\overline{MP}^2 + \overline{PT}^2} = \sqrt{2ax \mp xx} \times \sqrt{\frac{bb}{aa} + \frac{2ax \mp xx}{\overline{a \mp x}^2}}$.

Si à PR $\frac{bb}{aa} \times (a \mp x)$ l'on ajoûte AP, x; on trouvera AR $= \frac{bba \mp bbx + aax}{aa}$, & en ſe ſervant du demi-parametre p, AR $= p + x \mp \frac{px}{a}$; donc AR eſt *par rapport à la ſomme du demi-parametre de l'axe principal & de l'abſciſſe* x, *plus petite dans l'ellipſe, plus grande dans l'hyperbole, & égale dans la parabole* à cauſe que $\mp \frac{px}{a} = 0$. On trouveroit de même aR $=$

$\frac{2a^3 \mp aax \mp abb + bbx}{aa}$ ou $2a \mp x \mp p + \frac{px}{a}$, qui eſt une grandeur infinie dans la parabole.

Enfin, ſi de PT $\left(\frac{2ax \mp xx}{a \mp x}\right)$ l'on ôte AP (x); l'on trouvera AT $= \frac{ax}{a \mp x}$, qui donne AT $= x$ dans la parabole. De plus il eſt viſible que cette ligne devient infinie dans l'ellipſe lorſque $x = a$, & qu'elle devient a dans l'hyperbole lorſque x eſt infinie. De même on trouveroit aT $= \frac{2a \mp x}{a \mp x} \times a$, qui eſt infinie dans la parabole.

COROLLAIRE II.

185. Si de la ligne PT $\left(\frac{2ax \mp xx}{a \mp x}\right)$ on ôte PF, lorſque P tombe entre les points C, F dans l'ellipſe; ou ſi l'on ajoute PF à la même ligne, quand le point P tombe entre le ſommet A & le foyer F, on aura FT $= \frac{ax + ac \mp cx}{a \mp x}$; & de même ſi l'on ajoute PT $= \frac{2ax - xx}{a - x}$ à fP $2a - x - c$ (*Fig.* 15), ou ſi l'on retranche PT $\left(\frac{2ax + xx}{a + x}\right)$ de fP $2a + x + c$, (*Fig.* 21) on aura fT $= \frac{2aa \mp ax \mp ac + cx}{a \mp x}$; mais nous avons trouvé (*art.* 176) FM $= \frac{ac + ax \mp cx}{a}$, & par conſéquent fM $= \frac{2aa \mp ac \mp ax + cx}{a}$; donc FM : FT :: $\frac{ac + ax \mp cx}{a} : \frac{ac + ax \mp cx}{a \mp x} :: \frac{1}{a} : \frac{1}{a \mp x} :: a \mp x : a ::$ CP : CA. Donc auſſi fM : fT :: $\frac{2aa \mp ac \mp ax + cx}{a} : \frac{2aa \mp ac \mp ax + cx}{a \mp x} :: a \mp x : a ::$ CP : CA.

COROLLAIRE III.

186. Des deux proportions que l'on vient de trou-

ver, on tire une maniere nouvelle & commune aux trois Sections Coniques de mener une tangente à un point quelconque M, par le moyen de l'un ou l'autre foyer. Pour cela, il n'y a qu'à faire cette proportion CP : CA : : FM : FT ou : : fM : f T dont les trois premiers termes sont connus; ayant déterminé le point T, on menera la droite MT qui sera la tangente demandée. Si l'on suppose le demi-axe AC $= \infty$, il est évident que dans la proportion FM : FT : : $a \mp x : a$, les deux termes $a \mp x$ & a deviennent égaux; donc aussi FM $=$ FT, comme on le sçait d'ailleurs, parla nature de la parabole.

THÉOREME I.

187. *Si des foyers* F, f *on abaisse sur une tangente quelconque des perpendiculaires* FE, fe; *je dis que l'on aura* FE$\times fe = \text{CB}^2$. Fig. 15. & 21.

DÉMONSTRATION.

Les triangles sembl. MPT, FET, feT donneront MT : MP : : FT : FE : : fT : fe; donc FE $= \frac{\text{MP}}{\text{MT}} \times$FT, & $fe = \frac{\text{MP}}{\text{MT}} \times f$T; donc FE$\times fe = \frac{\overline{\text{MP}}^2}{\overline{\text{MT}}^2} \times \overline{\pm \overline{\text{CT}}^2 \mp \overline{\text{CF}}^2}$. Car FT $= \pm$CT$\mp$CF & fT $=$ CT$+$CF; mais on a déja trouvé (*art.* 184.) $\overline{\text{MT}}^2 = \overline{2ax \mp xx} \times \frac{bb}{aa} + \frac{\overline{2ax \mp xx}^2}{\overline{a \mp x}^2}$ & dans tous les cas $\overline{\text{MP}}^2 = \overline{2ax \mp xx} \times \frac{bb}{aa}$; donc en réduisant on aura $\frac{\overline{\text{MP}}^2}{\overline{\text{MT}}^2} = \frac{bb \times \overline{a \mp x}^2}{a^2b^2 \mp 2abbx + bbxx + 2a^3x \mp a^2x^2}$, multipliant cette derniere expression par $\pm \overline{\text{CT}}^2 \mp \overline{\text{CF}}^2 = \frac{\pm a^4}{\overline{a \mp x}^2} \mp cc$, ou par $\frac{a^2b^2 \mp 2abbx + bbxx + 2a^3x \mp a^2x^2}{\overline{a + x}^2}$; en mettant $aa \mp bb$ pour cc, & réduisant à la même dénomination, on verra évidemment que FE$\times fe = bb$.

LEMME.

188. *Si l'on a deux grandeurs variables* a, b *telles que l'une devenant* a+c, *l'autre devienne dans le même instant* b∓c (c *est l'accroissement des variables* a & b) *je dis que* $\frac{a}{b} : \frac{a+c}{b\mp c} \gtrless a : a+c$.

DÉMONSTRATION.

On sçait que si l'on compare ensemble deux raisons, la premiere est à la seconde comme le produit des extrêmes est au produit des moyens; lorsque les termes vont en augmentant. Ainsi il suffit de faire voir que le produit des extrêmes est plus petit que celui des moyens dans le premier cas, & plus grand dans le second: ce qui est bien évident, puisque les fractions $\frac{aa+ac}{b}$, $\frac{aa+ac}{b\mp c}$ qui ont le même numérateur sont entr'elles réciproquement comme les dénominateurs *b* & *b*∓*c*, c'est-à-dire, comme *b*∓*c* : *b*. *C. Q. F. D.*

THÉOREME II.

189. *Si d'un foyer* F *l'on mene à différents points* M, m *d'une Section Conique des droites* FM, Fm, *que nous appellerons* rayons vecteurs, *& des droites* FE, Fe *perpendiculaires aux tangentes en* M *&* m; *je dis que dans l'ellipse les racines quarrées des rayons vecteurs croissent moins l'une par rapport à l'autre que les perpendiculaires correspondantes des rayons vecteurs correspondans; qu'elles croissent plus dans l'hyperbole, & autant dans la parabole.*

Fig. 15. & 21.

DÉMONSTRATION.

A cause des triangles semblables FME, *f*M*e*; FM : FE :: *f*M : *fe*; donc FE $= \frac{FM \times fe}{fM}$; donc $\overline{FE}^2 = fe \times FE \times \frac{FM}{fM} = \overline{BC}^2 \times \frac{FM}{fM}$, (*art.* 187). Soit encore conçu

un autre point m avec son rayon vecteur Fm, sa tangente, & une perpendiculaire $F\epsilon$ sur cette tangente; on démontrera comme on vient de le faire pour FE, que $\overline{F\epsilon}^2 = \overline{BC}^2 \times \frac{Fm}{fm}$; donc $\overline{FE}^2 : \overline{F\epsilon}^2 :: \overline{BC}^2 \times \frac{FM}{fM} : \overline{BC}^2 \times \frac{Fm}{fm} :: \frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm}$; mais dans l'ellipse lorsque FM augmente, fM diminue; & dans l'hyperbole les lignes FM, fM augmentent également; donc par le Lemme précédent $\frac{FM}{fM} : \frac{Fm}{fm} \lessgtr FM : Fm$; donc aussi $\overline{FE}^2 : \overline{F\epsilon}^2 \lessgtr FM : Fm$, & en tirant les racines $FE : F\epsilon \lessgtr \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$; c'est-à-dire, que le premier rapport est plus petit que le second dans l'ellipse & plus grand dans l'hyperbole; donc $\sqrt{FM}$ contient plus de fois $\sqrt{Fm}$, que FE ne contient de fois $F\epsilon$; donc dans l'ellipse $\sqrt{Fm}$ est moins grande par rapport à $\sqrt{FM}$ que $F\epsilon$ par rapport à FE, & *vice-versa* pour l'hyperbole. *C. Q. F.* 1°. *D*.

Dans la parabole cette raison est celle d'égalité; car on a $FA : FE :: FE : FT$ ou FM, donc $FA \times FM = \overline{FE}^2$ & imaginant une autre Fm avec la ligne $F\epsilon$ correspondante on aura $\overline{F\epsilon}^2 = FA \times Fm$; donc $\overline{FE}^2 : \overline{F\epsilon}^2 :: FA \times FM : FA \times Fm :: FM : Fm$ & tirant les racines $FE : F\epsilon :: \sqrt{FM} : \sqrt{Fm}$. *C. Q. F.* 2°. *D*. Fig. 8.

DÉFINITION.

190. Si l'on fait passer un cercle par trois points infiniment proches sur le périmetre d'une Section Conique quelconque; ce cercle sera nommé *osculateur* & le rayon du même cercle sera aussi nommé *rayon osculateur* ou *rayon de courbure*; parce que la courbure de ce cercle est égale à celle de la Section Conique proposée aux points communs avec le cercle.

PROBLEME VII.

191. *Trouver le rayon de courbure pour une Section Conique quelconque.* Fig. 26. & 27.

SOLUTION.

pour l'ellipse & pour l'hyperbole.

Soient deux diametres conjugués CM, CL & par l'extrémité M du premier, soit abaissée sur le second la normale MRK. Soit de plus une droite NOn parallele à la tangente en M infiniment proche du point M coupée en π par la normale MR, & divisée en deux également en O. Enfin, par le point O soit menée une perpendiculaire mO à la droite Nn qui rencontre la courbe en un point m; il est visible que le centre du cercle osculateur doit se trouver sur cette ligne. Nommons $2z$ le diametre inconnu de ce cercle, t l'abcisse mO, & u l'abcisse MO prise sur le diametre CM. A cause du cercle qui passe par les trois points N, m, n on aura $\overline{NO}^2 = \overline{2z - t} \times t$; & parce que les mêmes points appartiennent à l'ellipse ou à l'hyperbole, on aura aussi $\overline{NO}^2 = \overline{2CM \mp u} \times u \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; donc $\overline{2z - t} \times t = \overline{2CM \mp u} \times u \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; mais lorsque le point m coïncide avec le point M, on a mO $=$ Mπ, & la raison de m O à MO, c'est-à-dire, la raison de t à u est la même que celle de Mπ à MO, ou de MK à MC à cause des triangles semblables MπO, MKC; donc $MK : CM :: t : u = \frac{t \times CM}{MK}$; mettant cette valeur de u dans l'équation trouvée ci-dessus elle deviendra, en divisant chaque membre par t, $2z - t = \left(2CM \mp \frac{CM \times t}{MK}\right) \times \frac{CM}{MK} \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; mais t étant infiniment petit à l'égard de z & de CM le premier membre devient $2z$ & le second $2CM \times \frac{CM}{MK} \times \frac{\overline{CL}^2}{\overline{CM}^2}$; donc $2z = \frac{2\overline{CL}^2}{MK}$; ou $z = \frac{\overline{CL}^2}{MK}$. *C. Q. F. T.*

SOLUTION POUR LA PARABOLE.

192. Gardant les mêmes dénominations que dans les deux figures précédentes; soit π le parametre du diametre MQ qui passe par le point M. On aura à cause du cercle osculateur Nmn $\overline{2z-t}\times t=\overline{ON}^2$, & à cause de la parabole $\pi u=\overline{NO}^2$; donc $\overline{2z-t}\times t=\pi u$; lorsque le point m est infiniment proche du point M, la raison de mO à MO est la même que celle de PR à MR; donc MR : PR : : $u : t$; donc $u=\frac{MR\times t}{PR}$; mettant cette valeur de u dans l'équation précédente & divisant par t, on aura $2z - t$ ou $2z=\frac{\pi\times MR}{PR}$. *C. Q. F. T. & D.* Fig. 28.

193. Pour avoir l'expression algébrique du rayon de courbure, on remarquera d'abord que l'égalité CL×MK $=ab$ (démontrée *art.* 108 & 158) donne $MK=\frac{ab}{CL}$; donc z ou $\frac{\overline{CL}^2}{MK}=\frac{\overline{CL}^3}{ab}$. De plus on a fait voir (*art.* 103) que $\overline{CM}^2+\overline{CL}^2=aa+bb$; & l'on prouvera de même dans l'hyperbole que la différence $\overline{CM}^2-\overline{CL}^2$ des quarrés des deux demi-diametres conjugués égale celle des quarrés des demi-axes; donc on aura toujours $\overline{CM}^2\pm\overline{CL}^2=aa\pm bb$. Donc $\overline{CL}^2=\pm aa+bb\mp\overline{CM}^2$; mais on aura à cause du triangle rectangle CPM; $\overline{CM}^2=\overline{CP}^2+\overline{PM}^2=aa\mp 2ax+xx+\overline{2ax\mp xx}\times\frac{bb}{aa}$, d'où l'on tire aisément . . . .

$CL=\sqrt{\frac{a^2b^2+2a^3x\mp a^2x^2\mp 2abbx+bbxx}{a}}$; donc z ou $\frac{CL^3}{ab}$

$=\sqrt{\frac{\left(a^2b^2+2a^3x\mp a^2x^2\mp 2abbx+bbxx\right)^3}{a^3\times ab}}$, ou mettant ap

pour bb, on aura $z=\sqrt{\frac{\left(a^3p+2a^3x\mp a^2x^2\mp 2a^2px+apxx\right)^3}{a^3\times a\sqrt{ap}}}$,

qui se réduit à p dans toutes les Sections Coniques en faisant $x = 0$; d'où il suit que dans chacune *le rayon de courbure au sommet est égal au demi-parametre de l'axe*. Si l'on compte les abscisses du centre C on trouvera CL $= \sqrt{\frac{\pm a^4 \mp a^2x^2 + apxx}{a}}$; donc $\frac{\overline{CL}^3}{ab}$ ou $\frac{\overline{CL}^3}{a\sqrt{ap}}$ ou $z = \sqrt{\frac{\pm a^4 \mp a^2x^2 + apxx}{a^3 \times a\sqrt{ap}}}^3$. Si l'on compare cette expression avec celle-ci $\sqrt{\frac{\pm a^3p \mp apxx + p^2x^2}{a^3 \times pp}}^3$ qui est le cube la normale MR divisé par le quarré du demi-parametre p de l'axe, on en trouvera tout de suite l'égalité; donc dans toute Section Conique on aura $z = \frac{\overline{MR}^3}{pp}$; c'est-à-dire, *que le rayon de courbure dans un point quelconque est égal au cube de la normale, divisé par le quarré du demi-parametre de l'axe principal pour toutes les Sections Coniques*; donc l'expression du rayon de courbure pour la parabole sera $z = \frac{\overline{\frac{1}{4}pp + px} \times \sqrt{\frac{1}{4}pp + px}}{\frac{1}{4}pp}$, si le parametre entier $= p$.

PROBLEME VIII.

194. *Les asymptotes* CB, CF *d'une hyperbole & un point* A *de cette courbe étant donnés; trouver tant d'autres points qu'on voudra de cette même courbe.*

SOLUTION.

Fig. 29. Par le point A l'on tirera dans l'angle des asymptotes des lignes quelconques BA*ab*, DAG*d* terminées aux mêmes asymptotes. On prendra sur ces lignes les parties $ab = AB$, $Gd = AD$ & tous les points trouvés de cette maniere seront des points à l'hyperbole demandée. Chacun de ces points comme G pourra servir à en trouver de nouveaux de la même maniere, en tirant des droites comme FG*gf* sur lesquelles on prendra $gf = GF$. Cette

ſolution eſt une ſuite évidente de ce que l'on a démontré ci-devant (*art.* 145). *C. Q. F. T.*

PROBLEME IX.

195. *Le foyer* F *d'une Section Conique quelconque, & trois points* M, N, P *de la courbe étant donnés; on demande de décrire cette courbe.* Fig. 30.

SOLUTION.

Il eſt évident que tout ſe réduit à trouver la directrice de cette courbe, ou ce qui revient au même, deux points de cette directrice. Pour y parvenir je ſuppoſe pour un inſtant le problême réſolu; c'eſt-à-dire, que la ligne BF menée par le foyer F repréſente l'axe de la courbe; & que la ligne BL perpendiculaire à cet axe ſoit la directrice. Des points donnés M, N, P je mene au foyer F les droites toutes connues MF, NF, PF & ſur la directrice les perpendiculaires MC, ND, PE; je tire auſſi les droites PNG, NML terminées à la directrice, & dont les parties PN, MN ſont connues; enfin, du point F comme centre avec les rayons MF, NF je décris les arcs MH, NK terminés aux lignes FN, FP pour avoir FH = FN — FM & FK = FP — FN. Cela poſé, on ſçait que les diſtances FP, FN, FM des points donnés P, N, M au foyer & les diſtances PE, ND, MC des mêmes points à la directrice doivent toujours être dans une raiſon conſtante; on aura donc FP : FN :: PE : ND & à cauſe des triangles ſemblables PEG, NDG PE : ND :: GP : GN; donc FP : FN :: GP : GN. Donc *dividendo* FP — FN ou FK : FN :: GP — GN ou PN : GN; donc $GN = \frac{PN \times FN}{FK}$; on trouvera de même $NL = \frac{MN \times FM}{FH}$; d'ailleurs ces deux expreſſions des lignes GN & ML ſont entierement connues; donc on a deux points de la directrice, & le problême eſt réſolu. *C. Q. F. T. & D.*

PROBLEME X.

Fig. 31. 196. *Le centre* C *d'une ellipse ou d'une hyperbole & deux tangentes* TM,TN *à cette courbe étant données de position avec le premier axe* Aa *donné seulement de grandeur ; il faut décrire cette courbe.*

SOLUTION.

Du point C donné comme centre avec le rayon CA égal à la moitié du grand axe, on décrira une portion de cercle qui coupe les tangentes TM, TN en deux points E, D; par les mêmes points on élevera aux tangentes les perpendiculaires EF, DF qui se couperont en un point F qui sera le foyer de la courbe à décrire. Ayant donc déterminé la position du grand axe, par le moyen du foyer qu'on vient de trouver, on achevera la description comme à l'ordinaire. Cette Solution est une suite nécessaire de ce que nous avons démontré (*art.* 69.) que le demi-grand axe CA est égal à la ligne CE menée du centre au point E de la tangente auquel aboutit une perpendiculaire menée du foyer F. Ce qui se démontreroit de même dans l'hyperbole. *C.* Q. *F. T. & D.*



CHAPITRE

CHAPITRE VI.

Notions abrégées sur les Sections Coniques des ordres supérieurs ; Théorie nouvelle sur les suites algébriques ; usage des mêmes suites pour trouver la quadrature des Sections Coniques ordinaires ; application des mêmes suites aux logarithmes hyperboliques ; maniere de les calculer appliquée à un exemple. Réflexions sur l'espace infini hyperbolique ; on en déduit une démonstration de deux propriétés de cette courbe, qui paroissent contradictoires, & l'on fait voir par un même principe l'accord de ces deux vérités.

DE's qu'on eût commencé à rechercher les propriétés des Sections Coniques par l'analyse & à les exprimer par des équations, il ne fut gueres possible de se restraindre aux équations que nous avons vû dans les Chapitres précédens. Pour donner aux commençants une idée de cette généralité, & pour suivre autant qu'il nous sera possible l'analogie qui a dû conduire ceux qui ont travaillé les premiers sur les Sections Coniques de tous les dégrés ; nous allons commencer par généraliser l'idée du cercle, & ensuite imaginant un cône qui ait pour base un cercle de tous les dégrés, nous ferons voir comment on coupe dans ce cône des paraboles, des ellipses, ou des hyperboles de tous les dégrés.

Définition des cercles de tous les dégrés.

197. Dans le cercle tel que nous l'avons considére jusqu'ici, nous avons trouvé pour une ordonnée quelconque

Fig. 6. & pour les abſciſſes correſpondantes AP : PM : : PM : Pa, d'où l'on a tiré l'équation $yy = 2ax - xx$; mais rien n'empêche d'imaginer une courbe telle qu'on ait $\overline{AP}^m : \overline{PM}^m : : \overline{PM}^n : \overline{Pa}^n$, & nommant toujours la ligne donnée $2a$, l'abſciſſe AP, x; la partie Pa, $2a - x$ & l'ordonnée PM y, cette proportion deviendra celle-ci $x^m : y^m : : y^n : \overline{2a - x}^n$; d'où l'on tire l'équation $y^{m+n} = (2a - x)^n \times x^m$ qui exprime les propriétés des cercles de tous les dégrés. Suppoſant actuellement cette courbe tracée ſur un plan & un point S élevé au-deſſus du même plan, ſi l'on imagine qu'une droite mobile autour du point S, ſuive par ſon extrémité inférieure tous les points du cercle repréſenté par l'équation $y^{m+n} = \overline{2a - x}^n \times x^m$; il réſultera de ce mouvement un cône de tous les dégrés dans lequel on trouvera les Sections Coniques de tous les ordres, dans le genre parabolique, elliptique ou hyperbolique; ſuivant la poſition du plan coupant à l'égard des côtés du cône.

Fig. 1.

PROBLEME I.

198. *Trouver l'équation à la courbe qui réſulte de la ſection d'un cône de tous les dégrés par un plan diſpoſé de maniere que l'axe* AB *de la courbe ſoit parallele au côté* DS, *& que l'inter-ſection de ce plan avec la baſe ſoit perpendiculaire au diametre* CD *de la même baſe.*

Fig. 3.

SOLUTION.

Soit coupé le cône CSD par un plan parallele à ſa baſe, on démontrera comme au Chapitre premier que les droites MPm, NBm; FG & CD ſont reſpectivement paralleles. De plus, les droites PM, BN étant des ordonnées des cercles dans leſquels elles ſe trouvent, on

aura $\overline{MP}^{m+n} = \overline{FP}^m \times \overline{PG}^n$ & $\overline{BN}^{m+n} = \overline{CB}^m \times \overline{BD}^n$; donc $\overline{MP}^{m+n} : \overline{BN}^{m+n} :: \overline{FP}^m \times \overline{PG}^n : \overline{CB}^m \times \overline{BD}^n$, & en divisant par les constantes égales $\overline{PG}^n$, $\overline{BD}^n$, puisque ces lignes sont comprises entre paralleles, on aura $\overline{MP}^{m+n} : \overline{BN}^{m+n} :: \overline{FP}^m : \overline{CB}^m$; ou :: $\overline{AP}^m : \overline{AB}^m$; d'où il suit que dans les courbes que donne cette façon de couper un cône, les puissances semblables $m+n$ des ordonnées sont entr'elles comme les puissances semblables m, m des abscisses correspondantes ; d'où il suit évidemment que toutes ces courbes sont du genre parabolique. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

199. Soit une quantité p^n telle que l'on ait $\overline{MP}^{m+n} = \overline{AP}^m \times p^n$; il est visible que l'on aura aussi pour toute autre ordonnée BN, $\overline{BN}^{m+n} = \overline{AB}^m \times p^n$; donc si l'on nomme x une abscisse quelconque, & y l'ordonnée correspondante, on aura $y^{m+n} = p^n x^m$, pour l'équation qui exprime la nature de toutes le paraboles des ordres supérieurs. Si l'on fait $p = 1$, on aura aussi $p^n = 1$ & par conséquent $y^{m+n} = x^m$; ou en faisant $m+n = r$ $y^r = x^m$; d'où il suit que cette équation exprime aussi la nature de toutes les paraboles.

PROBLEME II.

199. *Déterminer la nature des courbes que l'on trouve en coupant le même cône de maniere que le plan coupe les deux côtés du cône au-dessous du sommet, ou l'un au-dessous & l'autre au-dessus ; on le suppose toujours disposé de façon que l'intersection de ce plan avec la base du cône soit perpendiculaire au diametre* CD *de la même base.* Fig. 4. & 5.

SOLUTION.

Soient encore imaginés deux plans FMG, HNL paralleles à la base du cône qui rencontrent le plan coupant dans les lignes Mm, Nn qui seront paralleles entr'elles ainsi que les diametres FG, HL. Les cercles FMG, HNL donnent $\overline{MP}^{m+n} = \overline{FP}^m \times \overline{PG}^n$ & $\overline{NQ}^{m+n} = \overline{HQ}^m \times \overline{QL}^n$; donc $\overline{MP}^{m+n} : \overline{NQ}^{m+n} :: \overline{FP}^m \times \overline{PG}^n : \overline{HQ}^m \times \overline{QL}^n$; mais les triangles semblables PAF, QAH donnent $\begin{matrix} \overline{FP}^m : \overline{HQ}^m :: \overline{AP}^m : \overline{AQ}^m \\ \overline{GP}^n : \overline{LQ}^n :: \overline{aP}^n : \overline{aQ}^n \end{matrix}$; donc en multipliant par ordre $\overline{FP}^m \times \overline{GP}^n : \overline{HQ}^m \times \overline{LQ}^n :: \overline{AP}^m \times \overline{aP}^n : \overline{AQ}^m \times \overline{aQ}^n$; d'où il suit évidemment que $\overline{MP}^{m+n} : \overline{NQ}^{m+n} :: \overline{AP}^m \times \overline{aP}^n : \overline{AQ}^m \times \overline{aQ}^n$, c'est-à-dire, que les puissances semblables $m+n$ des ordonnées MP, NQ sont entr'elles comme les rectangles des puissances semblables m & n des abscisses correspondantes; donc ces courbes sont du genre elliptique & hyperbolique. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

201. Puisque les puissances $m+n$ des ordonnées sont toujours entr'elles comme les rectangles des abscisses correspondantes élevées aux puissances m & n; il s'ensuit que ce rapport est constant; & par conséquent qu'il peut être exprimé par celui de b^m à a^m ou celui de $p:a$; donc si l'on nomme x une abscisse AP, $2a$ le diametre Aa, l'autre abscisse sera $\overline{2a \mp x}$; & représentant chaque ordonnée par y, on aura $y^{m+n} : x^m \times \overline{2a \mp x}^n :: b^n : a^m :: p : a$; d'où l'on tire l'équation $y^{m+n} = x^m \times \overline{2a \mp x}^n \times$

$\frac{b^n}{a^m}$, ou $y^{m+n} = x^m \times \overline{2a \mp x}^n \times \frac{p}{a}$ qui expriment également les propriétés des ellipſes & des hyperboles de tous les dégrés.

COROLLAIRE II.

202. Si l'on fixoit l'origine des abſciſſes au milieu du diametre $2a$, on auroit $AP = \pm a \mp x$ & $aP = a + x$; donc $y^{m+n} : \overline{\pm a \mp x}^m \times \overline{a + x}^n :: p : a$; d'où l'on déduit encore une nouvelle équation pour les ellipſes & les hyperboles de tous les degrés $y^{m+n} = \overline{\pm a \mp x}^m \times \overline{a + x}^n \times \frac{p}{a}$; qui deviendra ainſi que les précédentes une équation aux cercles ou aux hyperboles équilatères de tous les dégrés l'orſque $p = a$, ou lorſque $b = a$.

PROBLEME III.

203. *Trouver l'équation qui exprime la nature des hyperboles de tous les dégrés rapportées à leurs aſymptotes.*

SOLUTION.

Nous avons trouvé (*art.* 156) que l'équation de l'hyperbole rapportée à ſes aſymptotes eſt $xy = cc$. En généraliſant cette idée, comme on a fait pour les autres; on trouvera $x^m y^n = c^{m+n}$; & c'eſt l'équation que l'on demande. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE.

204. Comme on peut faire la conſtante $c =$ à l'unité, il s'enſuit que $x^m y^n = 1$ eſt auſſi une équation aux hyperboles de tous les dégrés rapportées à leurs aſymptotes. Pareillement $y^n = \frac{1}{x^m}$ ou x^{-m} exprime encore la nature de ces courbes; d'où il ſuit que l'équation y^r ou

$y^{m+n} = x^m$ de toutes les paraboles s'étend aussi à toutes les hyperboles, pourvu que m désigne une quantité négative quelconque.

THEOREME I.

205. *On peut quarrer toutes les courbes dans lesquelles la sou-tangente & l'abscisse sont dans un rapport constant.*

Fig. 32.

DÉMONSTRATION.

Soit une courbe quelconque AMm qui ait pour axe AP; une tangente AQ à son sommet à laquelle les ordonnées PM sont paralleles; une autre tangente MT terminée à l'axe en T d'où l'on a élevé TR parallele aux MP; & par deux points M, m infiniment proches des droites MP, mp; MR, mr respectivement paralleles à la ligne TR & à l'axe AP. Il est visible qu'on peut regarder les trapezes mpPM, mqQM comme les élémens de l'espace APMZA & de son complement AQMZA; de plus il est encore évident que les trapezes MPpm, MRrm ou les parallélogrammes MPpO, MRro qui ne différent de ces trapezes que des triangles égaux & infiniment petits MmO, Mmo sont égaux puisqu'ils sont complements de parallélogrammes; donc si l'on suppose, comme on le fait ici, que PT soit à PA dans un rapport constant; les parallélogrammes rRMo, qQMo seront aussi dans le même rapport puisqu'ils ont ces lignes pour base avec une même hauteur; donc aussi chaque élément de l'espace APM sera à son correspondant dans l'espace AQM dans le même rapport; & par conséquent la somme des élémens d'une part est à la somme des élémens de l'autre dans le même rapport; donc si l'on désigne ce rapport par celui de $m:n$, on aura APMZ : AQMZ : : $m:n$, & *componendo* APMZ : APMQ : : $m : m+n$; donc APMZ $=$ APMQ $\times \frac{m}{m+n}$

$= \frac{m}{m+n} xy$; donc toutes ces courbes seront quarrables, puisqu'elles auront un rapport fini & donné avec le rectangle des abscisses. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

206. Si la courbe étoit convexe du côté de l'axe comme dans la figure (33) la proposition n'en seroit pas moins certaine, pourvû que la sou-tangente fut toujours dans un rapport constant avec l'abscisse AP. Car soit inscrit un parallélogramme fini ABCD, & soit achevée la construction comme dans la figure précédente ; il est visible que chaque élément MPpm de l'espace indéfini BCGF ou son égal MRrm est à l'élément correspondant MQqm de l'espace AFGCD comme PT : AP : : $m : n$; donc en sommant ces deux suites BFGC : AFGCD : : $m : n$, & par conséquent BFGC : AFCGD — BFCG ou ABCD : : $m : n - m$. Donc BFCG $= \frac{m}{n-m} \times$ ABCD, qui sera toujours une quantité finie tant que le dénominateur ne sera pas zero.

COROLLAIRE II.

207. Si le rapport de m à $\pm m + n$ est un rapport de nombre à nombre, la courbe sera absolument quarrable ; si c'est une raison incommensurable, la quadrature n'en sera pas moins complette ; mais on ne pourra l'exprimer en nombres entiers que par approximation. Ainsi l'on peut en général distinguer trois sortes de quadratures algébriques des courbes ; des quadratures absolues & complettes que l'on peut exprimer par des nombres finis & rationnels ; des quadratures absolues & incomplettes, qui renferment nécessairement une expression finie composée de radicaux ; enfin, des quadratures qui ne peuvent être exprimées que par des suites, & que l'on ne peut pas même ramener à une seule ex-

pression composée d'incommensurables. Il y a grande apparence que la quadrature du cercle & de l'ellipse sont de cette nature; ce qui peut se conclure directement de la théorie présente.

LEMME I.

208. Si l'on divise $1 - z^{\frac{n}{m}}$ par $1 - z$: je dis que le quotient sera exprimé par cette suite infinie; .....
$$\frac{1 + z + z^2 + z^3 + z^4, \&c.}{1 + z^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{2n}{m}} + z^{\frac{3n}{m}} + z^{\frac{4n}{m}}, \&c.}$$

DÉMONSTRATION.

Soit une progression géométrique, $\div\!\div 1, z^1, z^2, z^3, z^4$, &c. dont z soit la raison, & n le nombre des termes; on sçait que le dernier terme sera z^{n-1}, & que la somme des antécédens est à celle des conséquens, comme un seul antécédent à son conséquent. Donc, en désignant la somme de tous les termes par s, la somme des antécédens sera $s - z^{n-1}$, & celle des conséquens sera $s - 1$; ce qui donne la proportion $s - z^{n-1} : s - 1 :: 1 : z$; donc, $\overline{s - 1} \times 1 = \overline{s - z^{n-1}} \times z$, ou $s - 1 = sz - z^n$; d'où l'on tire aisément $s = \frac{1 - z^n}{1 - z}$. Présentement si l'on a pareillement une progression géométrique, dont le nombre de termes soit m, & la raison $z^{\frac{n}{m}}$, on trouvera cette égalité $1 + z^{\frac{n}{m}} + z^{\frac{2n}{m}} + z^{\frac{3n}{m}} + z^{\frac{4n}{m}} + \ldots z^{\frac{n \times \overline{m - 1}}{m}} = \frac{1 - z^n}{1 - z^{\frac{n}{m}}}$; donc, en divisant ces deux pro-

progressions géométriques l'une par l'autre, ainsi que leurs sommes, on aura . . . .

$$\frac{1-z^{\frac{n}{m}}}{1-z}=\frac{1+z+z^2+z^3+z^4+\ldots\ldots z^{n-1}}{1+z^{\frac{n}{m}}+z^{\frac{2n}{m}}+z^{\frac{3n}{m}}+\ldots z^{\frac{n\times m-1}{m}}}.\text{C. Q. F. D.}$$

LEMME II.

209. *Trouver la soutangente des courbes, représentées par l'équation générale* $y^m = x^n$.

SOLUTION.

Imaginons une sécante quelconque *mMT*, terminée à l'axe en T, & soient nommées les abscisses AP, x; Ap, z; les ordonnées correspondantes PM, y; pm, u. Il est visible que le rapport de PM à la sousécante PT, est le même que celui de mR à MR, à cause des triangles semblables mRM, MPT. L'équation $y^m = x^n$ donne $y = x^{\frac{n}{m}}$, & par la même raison $u = z^{\frac{n}{m}}$; donc pm — PM ou mR $= z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}$ & Pp ou MR $= z - x$; donc puisque PM : PT : : mR : MR, on aura $\frac{PM}{PT} = \frac{z^{\frac{n}{m}} - x^{\frac{n}{m}}}{z - x}$ divisant le dénominateur de cette fraction par z, le numérateur par $z^{\frac{n}{m}}$, & ensuite multipliant tout par $z^{\frac{n}{m}-1}$, on aura $\frac{PM}{PT} = z^{\frac{n}{m}-1} \times \frac{1 - \frac{x}{z})^{\frac{n}{m}}}{1 - \frac{x}{z}}$. Faisant pour abréger $\frac{x}{z} = t$; on aura de nouveau $\frac{PM}{PT} = z^{\frac{n}{m}-1} \times \frac{1 - t^{\frac{n}{m}}}{1 - t}$; ce qui deviendra, par le lemme précédent, $z^{\frac{n}{m}-1} \times$

$\frac{1+t+t^2+t^3+\ldots t^{n-1}}{1+t^{\frac{n}{m}}+t^{\frac{2n}{m}}+t^{\frac{3n}{m}}+\ldots t^{\frac{n}{m}\times\overline{m-1}}}$. Supposons présentement que pm se confonde avec PM, la sou-sécante devient la sou-tagente ; l'abscisse AP (x) $=$ Ap (z), & par conséquent $\frac{x}{z}$ ou $t=1$. Mais le numérateur de la fraction qui multiplie $z^{\frac{n}{m}-1}$, est une progression géométrique, dont le nombre des termes est n, & le dénominateur de la même fraction est aussi une progression géométrique, dont le nombre des termes est m; donc, cette fraction se réduira à un nombre n d'unités divisé par un autre nombre m d'unités, puisque $t=1$; donc, $\frac{PM}{PT}=z^{\frac{n}{m}-1}\times\frac{n}{m}$; ou, puisque $x=z$; $\frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1}=\frac{nx^{\frac{n}{m}}}{mx}$; donc, en mettant à la place de $x^{\frac{n}{m}}$ sa valeur y, on aura $\frac{PM}{PT}$ ou $\frac{y}{PT}=\frac{ny}{mx}$; d'où l'on tire tout de suite PT $=\frac{mx}{n}$. *C. Q. F. D.*

COROLLAIRE I.

210. Donc, toutes les courbes représentées par l'équation générale $y^m=x^n$ seront quarrables; puisque dans toutes ces courbes la soutangente est dans un rapport constant avec l'abscisse; comme il est évident par l'équation PT $=\frac{mx}{n}$, qui donne $m:n::$ PT : x. Donc, suivant ce qu'on a vu, (*art.* 205 & 206) la formule générale pour trouver l'espace APMZ $=\frac{m}{m+n}xy$; ou en mettant pour y sa valeur $x^{\frac{n}{m}}$, APMZ $=\frac{m}{m+n}x^{\frac{n}{m}+1}=$

$\frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$; & de même la formule pour trouver la quadrature de tous les complements AQMZ, sera

$$AQMZ = \frac{n}{m+n} xy = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m}{n}+1} = \frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}}$$

en mettant pour x sa valeur $y^{\frac{m}{n}}$.

COROLLAIRE II.

211. Si l'on imagine que les abscisses AP, Ap croissent suivant la progression arhitmétique ÷ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6, &c. & que l'unité ou la différence de cette progression, soit une grandeur infiniment petite; comme chaque ordonnée $y = x^{\frac{n}{m}}$, il est évident que ces ordonnées ne sont autre chose que les termes de cette même progression, tous élevés à la même puissance; dont l'exposant est $\frac{n}{m}$: ainsi la somme de toutes les ordonnées, ou la surface de la courbe, sera la somme de tous les termes de cette suite $0^{\frac{n}{m}}$, $1^{\frac{n}{m}}$, $2^{\frac{n}{m}}$, $3^{\frac{n}{m}}$, ainsi jusques à $x^{\frac{n}{m}} = \infty^{\frac{n}{m}}$, parce que l'on peut toujours supposer qu'une abscisse finie AP, contient une infinité de parties infiniment petites. De même, si l'on comte les abscisses sur la ligne AQ; ou, ce qui revient au même, si l'on imagine que les parties AQ, Aq, ou les ordonnées PM, pm leurs égales, croissent suivant une progression arithmétique, telle que celle dont on vient de parler; comme chaque abscisse $x = y^{\frac{m}{n}}$, il est visible que les lignes QM, qm seront les puissances $\frac{m}{n}$ des ordonnées correspondantes; donc, la somme des mêmes lignes QM, qm, ou la surface du complement AMQZ sera la somme de tous les

termes de la suite des nombres naturels élevés à la même puissance, dont l'exposant est $\frac{m}{n}$.

COROLLAIRE III.

212. Donc, la quadrature des courbes representées par l'équation $y^m = x^n$, donne en même tems la solution de ce problême. *Trouver la somme de toutes les puissances semblables de tous les nombres possibles, depuis zero jusques à l'infini;* & les formules $\frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$, ou $\frac{n}{m+n} y^{\frac{m+n}{n}}$, nous indiquent ce qu'il faut faire pour le résoudre. Voici à quoi se réduit le procédé. *On augmentera d'une unité l'exposant de la puissance donnée; & par ce nouvel exposant, l'on divisera le dernier terme ou le plus grand élément élevé à une puissance marquée par ce même exposant, ainsi augmenté de l'unité.* Nous allons éclaircir ceci par quelques exemples.

213. Soit proposé de trouver la somme des puissances successives $\frac{m}{n}$ de tous les nombres naturels, depuis zero jusques à l'infini. La somme des premieres puissances, suivant la formule $\frac{m}{m+n} x^{\frac{n+m}{m}}$ sera $\frac{1}{2} \infty^2 = \frac{1}{2} \infty \times \infty$, qui donne la surface du triangle qui est aussi représenté par l'équation $y^m = x^n$, & dont les élémens croissent, comme on le sçait, en progression arhitmétique, depuis le sommet jusques à sa base. Suivant la même formule, les sommes des 2[mes], 3[mes], 4[mes], 5[mes] puissances, &c. feront respectivement $\frac{1}{3} \infty^3$, $\frac{1}{4} \infty^4$, $\frac{1}{5} \infty^5$, $\frac{1}{6} \infty^6$. On trouveroit avec la même facilité la somme de toutes les racines de la même suite des nombres naturels, en faisant dans l'ex-

posant $\frac{n}{m}$, $n = 1$ & m successivement égal à 1, 2, 3, 4, &c. & l'on auroit pour les sommes de toutes les racines, 2mes, 3mes, 4mes, &c. $\frac{2}{3}\infty^{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{4}\infty^{\frac{4}{3}}$, $\frac{4}{5}\infty^{\frac{5}{4}}$; ce seroit toujours la même chose quelque fut la fraction $\frac{n}{m}$. Sur quoi l'on remarquera que toutes ces sommes auroient pû être representées par des puissances de x, en supposant que cette quantité x contient une infinité de parties égales; ce qui auroit donné pour les sommes des racines 2mes, 3mes, &c. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$, $\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}}$, & ainsi des autres.

COROLLAIRE IV.

214. Réciproquement toute quantité pouvant être regardée comme la somme de tous les termes des nombres naturels, tous élevés à une même puissance; on pourra toujours trouver l'élément de cette quantité, en suivant l'inverse du procedé qu'on vient d'établir, ce qui se réduit à celui-ci. *On multipliera la quantité proposée par son exposant, & on lui en donnera un nouveau plus petit que le premier, d'une unité; la nouvelle expression sera l'élément cherché.* Ainsi, pour trouver l'élément des quantités $\frac{1}{2}x^2$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{1}{4}x^4$, $\frac{n}{m}x^p$, je les écris comme il suit, $\frac{2\times 1}{2}x^{2-1}$, $\frac{3\times 1}{3}x^{3-1}$, $\frac{4\times 1}{4}x^{4-1}$, $\frac{pn}{m}x^{p-1}$, ce qui se réduit à x, x^2, x^3, $\frac{pn}{m}x^{p-1}$; d'où il suit que les quantités proposées, sont les sommes de toutes les x possibles, ou de tous les nombres possibles compris dans x, & élevés à des puissances marquées par les exposans 1, 2, 3, $p-1$, &c. lesquels éléments peuvent avoir des coëfficiens finis & déterminés, comme il arrive ici dans la formule générale $\frac{pn}{m}x^{p-1}$.

SCHOLIE.

215. Je pourrois pousser plus loin cette théorie, qui dans le fond ne differe en rien du calcul différentiel & intégral ; si ce n'est que dans ces calculs, on représente par une note la quantité infiniment petite, que je suppose ici égale à l'unité. C'est ce que Newton a fait lui-même dans un petit ouvrage qui est à la fin de ses principes, & dans lequel ce grand homme commence, comme nous avons fait ici, par la quadrature des courbes, représentées par l'équation $y^m = x^n$; à laquelle il rapporte non-seulement la quadrature des autres courbes, mais encore leur rectification ; & dont on pourroit également déduire la cubature des solides, & les centres de gravité. Cette partie pourra servir de commentaire à cet Ouvrage, à la tête duquel M. Newton a mis lui-même *Methodum . . . . &c. breviter explicatam potiùs quàm accurratè demonstratam.*

PROBLEME IV.

Fig. 32. 216. *Trouver par le moyen des suites la quadrature de la parabole ordinaire.*

SOLUTION.

On peut regarder la surface d'une portion de parabole APM, comme la somme de toutes les ordonnées * pos-

* Si l'on avoit quelque difficulté à concevoir une surface formée de lignes posées les unes auprès des autres ; parce que des lignes n'ayant point d'étendue superficielle, ne peuvent en produire aucune, en si grand nombre qu'on les imagine ; il n'y a qu'à supposer cette surface égale à la somme d'une infinité de petits rectangles A*Ppm*, dont les hauteurs sont les différentes ordonnées de la courbe, & qui ont tous une même base P*p*, que l'on suppose une partie infiniment petite de AP (x), & que l'on représente par l'unité. Mais tous ces rectangles ayant une même base, sont entr'eux comme les hauteurs qui sont les ordonnées ; donc, la somme de tous ces rectangles, ou la surface de la courbe, sera aussi comme la somme de ces mêmes ordonnées ; & l'on voit par ce raisonnement comment les deux méthodes reviennent au même, quoique à parler exactement, il n'y ait que l dernière qui soit veritablement géométrique.

ſibles, correſpondantes à toutes les abſciſſes qui croiſſent ſelon la progreſſion arihtmétique 0, 1, 2, 3, &c. dont la différence, qui eſt l'unité, ſera une partie infiniment petite de AP. Toutes les ordonnées étant entr'elles, comme les racines quarrées des abſciſſes ſeront auſſi entr'elles comme les racines quarrées des termes de la même ſuite; & par conſéquent la ſurface du ſegment parabolique, ſera la ſomme de tous les termes de cette ſuite $0^{\frac{1}{2}}, 1^{\frac{1}{2}}, 2^{\frac{1}{2}}, 3^{\frac{1}{2}}$, &c. $x^{\frac{1}{2}} = \infty^{\frac{1}{2}}$. Sommant cette ſuite par la formule $\frac{m}{m+n} x^{\frac{m+n}{m}}$, en faiſant $m = 2$ & $n = 1$, on aura la ſurface du ſegment parabolique $= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} xy$, en mettant y à la place de $x^{\frac{1}{2}}$ qui lui eſt égal. Et cette quadrature eſt préciſément la même que nous avons déja trouvée par une autre méthode (*art.* 51.) *C. Q. F. D.*

PROBLEME V.

217. *Trouver la ſurface d'une portion d'ellipſe* CBMP *terminée par une partie* CP *de l'axe ou d'un diametre quelconque, par l'axe ou le diametre* CB *conjugué au premier, une portion* BM *de la courbe & une ordonnée* PM; *en comptant les abſciſſes du centre.* Fig. 17.

SOLUTION.

Nous concevons toujours la ſurface qu'il faut quarrer, comme remplie d'une infinité d'ordonnées, poſées les unes auprès des autres, & dont les abſciſſes croiſſent ſuivant la progreſſion arithmétique 0, 1, 2, 3, 4, &c. dont la différence, qui eſt l'unité, eſt une partie infiniment petite de l'abſciſſe CP. L'équation à l'ellipſe donne $yy = \frac{bb}{aa} \times \overline{aa - xx}$, & partant $y = \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx}$; je développe l'expreſſion $\sqrt{aa - xx}$, & j'en prends la racine ſuivant les regles ordinaires; ce qui me donne

cette suite infinie $y = \frac{b}{a} \times \left(ax^0 - \frac{xx}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} - \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7}\ \&c.\right)$ Je fais attention que les coëfficiens de chaque terme de cette suite $a - \frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3}, - \frac{1}{16a^5}$ &c. étant constants pour chaque ordonnée y; pour avoir la somme de toutes les ordonnées possibles, il faudra multiplier chacun de ces co-efficients par la somme de toutes les x possibles élevées aux puissances dont les exposans sont 0, 2, 4, 6, &c. & qui répondent à chacun de ces co-efficients. Mais on sçait par la formule $\frac{m}{m+n} x^{\frac{n}{m}+1}$ que les sommes de toutes ces puissances sont respectivement, $x, \frac{x^3}{3}, \frac{x^5}{5}, \frac{x^7}{7}$, &c. Donc la surface de la portion elliptique CPMB sera répréséntée par cette suite $bx - \frac{bx^3}{6a^2} - \frac{bx^5}{40a^4} - \frac{bx^7}{112a^6} - \frac{5bx^9}{1152a^8}$, &c. Cette suite sera d'autant plus convergente, & par conséquent donnera une approximation d'autant plus rapide, que x sera plus petit par rapport à a. Comme on n'a pû jusqu'ici sommer cette suite en termes finis, la quadrature absolue de l'ellipse ne peut aussi se déterminer que par approximation. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

218. Si l'on suppose $x = a$, on aura la surface du quart d'ellipse $= ab - \frac{1}{6}ab - \frac{1}{40}ab - \frac{1}{112}ab - \frac{5}{1152}ab$ ou $ab \times (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112} - \frac{1}{1152}$, &c.) & quadruplant le résultat de cette suite, on aura la surface entiere de l'ellipse. Si l'on suppose $a = b$, comme cela arrive dans le cercle, la suite $aa \times (1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40} - \frac{1}{112}$, &c.) donnera la quadrature du cercle d'autant plus approchée qu'on sommera un plus grand nombre de termes de cette même suite.

COROLLAIRE

COROLLAIRE II.

219. Les surfaces de deux ellipses sont entr'elles comme les rectangles de leurs axes; c'est une suite nécessaire de ce que chacune est égale à $4ab$ multiplié par la même suite $1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{40}$, &c. Il suit encore de-là que si l'on cherche une ligne c moyenne proportionnelle entre a & b, la surface de l'ellipse sera égale à celle du cercle fait sur cette ligne comme rayon; ainsi qu'on on l'a déja démontré *art.* 110.

PROBLEME VI.

220. *Trouver la surface d'une portion d'hyperbole* ACQM (fig. 22).

SOLUTION.

Nous avons vû qu'en prenant les abscisses CQ sur le second axe, & les ordonnées QM paralleles au premier, on a $\overline{QM}^2 : \overline{CQ}^2 + \overline{CB}^2 :: \overline{CA}^2 : \overline{CB}^2$; donc si l'on nomme CQ, x; QM, y; AC, a; CB, b; on aura $yy : xx + bb :: aa : bb$; donc $y = \frac{a}{b}\sqrt{xx + bb}$. Développant l'expression radicale suivant les regles de l'extraction des racines quarrées, on trouve $y = \frac{a}{b} \times \left(bx^0 + \frac{xx}{2b} - \frac{x^4}{8b^3} + \frac{x^6}{16b^5} - \frac{5x^8}{128b^7} + \frac{7x^{10}}{256b^9}, \&c.\right)$. Faisant les mêmes raisonnemens qu'on a fait au Problême précédent & sommant chaque terme de cette suite, on aura la surface hyperbolique ACQM $= ax\left(1 + \frac{x^2}{6b^2} - \frac{x^4}{40b^4} + \frac{x^6}{112b^6} - \frac{5x^8}{1152b^8} + \frac{7x^{10}}{2816b^{10}} \&c.\right)$ qui sera d'autant plus convergente que x sera plus petit que b. *C. Q. F. T.*

COROLLAIRE I.

221. Si l'on suppose $x = b$, on aura dans ce cas l'aire hyperbolique $= ab \times \left(1 + \frac{1}{6} - \frac{1}{40} + \frac{1}{112} - \frac{5}{1152} + \frac{7}{2816}, \&c.\right)$ & si l'hyperbole est équilatère, ou ce qui revient au même, si $a = b$, la surface hyperbolique ACBM sera égale au quarré aa multiplié par cette même suite; sur quoi l'on remarquera que si l'on compare une hyperbole quelconque avec l'hyperbole équilatère qui auroit le second axe commun; les aires ACQM établies sur une abscisse commune, seront entr'elles comme les axes inégaux. Donc la quadrature de l'hyperbole équilatère donneroit celle de toutes les autres hyperboles; comme la quadrature du cercle donneroit celle de toutes les ellipses.

COROLLAIRE II.

222. Si du rectangle CPMQ $= xy$ on ôte la surface ACQM on aura le demi-segment APM d'autant plus exactement qu'on aura déterminé l'espace ACQM avec plus de précision. On trouveroit de même l'aire du secteur CAM terminé par le diametre CM, le premier axe AC & la courbe AMM; en retranchant le triangle CQM ou $\frac{1}{2} xy$ de l'espace ACQM.

PROBLEME VII.

223. *Trouver la surface comprise entre l'hyperbole & son asymptote.*

SOLUTION.

On peut concevoir cet espace rempli d'une infinité
Fig. 35. de petits rectangles tels que BblL qui ont tous pour base une partie infiniment petite de l'asymptote & pour hauteur l'ordonnée correspondante BL. Tous ces rectangles ayant une même base, leur somme ou l'aire hyperboli-

que sera comme la somme de toutes les ordonnées. On a vu (*art.* 203) que l'équation aux asymptotes pour les hyperboles de tous les genres est $x^m y^n = c^{m+n}$, ou en faisant $c = 1$, $y^n = \frac{1}{x^m}$, d'où l'on tire $y = x^{-\frac{m}{n}}$; & prenant la formule de l'article 212, la somme de toutes les y, ou l'espace asymptotique sera égal à $\frac{n}{n-m} x^{\frac{n-m}{n}} = \frac{n}{n-m} xy$. Si l'on applique cette formule à l'hyperbole ordinaire en faisant m & $n = 1$, on trouvera l'aire asymptotique $= \frac{xy}{0}$ qui est toujours une grandeur infinie à cause que le quotient de $\frac{1}{0}$ est infini. *C. Q. F. T.*

On verra ci-après qu'elle est la nature de cet espace infini ; & pourquoi il est réellement infini. On fera voir aussi qu'elle est l'unité par rapport à laquelle il est infini ; car il faut bien prendre garde que l'infini dont il s'agit ici, n'est qu'un infini de rapport.

PROBLEME VIII.

224. *Exprimer par une suite algébrique l'espace* ABLK *compris entre une partie* KL *de l'hyperbole, une partie* AB *de son asymptote & deux ordonnées quelconques* AK, BL *à la même asymptote.* Fig. 35.

SOLUTION.

Pour trouver un résultat différent du dernier, nous prendrons sur l'une des asymptotes AC $= a$, & nous compterons l'origine des x au même point A, en faisant AB, AD $= x$. Par le même point A nous menerons une droite AK parallele à l'autre asymptote CR & nous ferons encore AK $= c$ & les lignes comme BL, DM $= y$. Ce qui donnera CB ou CD $= a + x$. Donc puisque CB $\times$ BL, ou CD $\times$ DM $=$ CA $\times$ AK, on aura $\overline{a+x} \times y = ac$; donc $y = \frac{ac}{a+x}$; je divise le numéra-

teur de cette fraction par le dénominateur, ce qui donne $y = c - \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a^2} - \frac{cx^3}{a^3}$, &c ; ou $y = c \times$ $\left(\frac{x^0}{a^0} - \frac{x}{a} + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^3}{a^3}, \&c.\right)$ qui sera d'autant plus convergente que x sera plus petit par rapport à a. Prenant la somme de tous ces termes, on trouvera l'espace asymptotique ABLK ou ADMK $= c \times \left(\frac{x}{a^0} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3} + \frac{x^5}{5a^4}, \&c.\right)$ ou en faisant les lignes AC, AK égales entr'elles & chacune égale à l'unité, on aura ABLK ou ADMK $= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$, &c.

Si au lieu de prendre les x vers F, on les prenoit vers C; ou, ce qui revient au même, si l'on cherchoit une espace hyperbolique tel que AGHK; dans la suite $c - \frac{cx}{a} +$, &c. trouvée pour la valeur de y il n'y a qu'à faire x négatif, & l'on trouvera $y = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a^2} + \frac{cx^3}{a^3}$, &c. Sommant chaque terme & supposant toujours AC $=$ AK $= 1$, on trouvera AGHK $= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}$, &c. Donc la suite générale $x \mp \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \mp \frac{x^4}{4}$, &c. représentera les aires asymptotiques prises de part & d'autre de la droite AK. *C. Q. F. T. & D.*

COROLLAIRE I.

225. Supposant toujours CA $=$ AK $= a$, si l'on prend une autre ligne CB $= b$ & une autre abscisse BD $= z$ dont l'origine soit en B & dont l'ordonnée correspondante DM soit nommée t; l'équation à l'hyperbole donne $\overline{b + z} \times t = aa$. Donc chaque ordonnée comprise dans la partie LBTX sera $t = \frac{aa}{b+z}$; ou en ré-

duisant cette expression en suite infinie $t = \frac{aaz^0}{b} - \frac{aaz}{bb} + \frac{aaz^2}{b^3} - \frac{aaz^3}{b^4}$, &c. Sommant cette suite, on aura l'espace LBDM ou LBFN & autres semblables chacun $= \frac{aaz}{b} - \frac{aaz^2}{2b^2} + \frac{aaz^3}{3b^3} - \frac{aaz^4}{4b^4}$, &c. Si l'on suppose encore cette suite égale à la suite précédente qui devient en faisant $a = c$, $ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a} - \frac{x^4}{4a^2} + \frac{x^5}{5a^3}$, &c. ou, ce qui revient au même, si lon suppose l'espace ABLK = LBDM on aura cette équation $\frac{aaz^4}{b} - \frac{aaz^2}{2b^2} + \frac{aaz^3}{3b^3}$, &c. $= ax - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3a}$, &c. Comme ces deux suites ont un même nombre de termes & que les indéterminées s'y trouvent élevées aux mêmes puissances dans les termes de même rang, chaque terme de l'une sera égal à chaque terme de l'autre; donc $ax = \frac{aaz}{b}$ ou $x = \frac{az}{b}$; d'où l'on tire $a : b :: x : z$. De plus, les quantités x & b étant indéterminées, on peut supposer $b = a + x$; donc on aura; $a : a + x :: x : z$, ou CA (a) : CB ($a + x$) :: AB (x) : BD (z). Donc CA : CB :: CB — CA : CD — CB, puisque AB = CB — CA & que BD = CD — CB ; d'où l'on tire, en effaçant ce qui se détruit, CA × CD = $\overline{CB}^2$; donc CA : CB :: CB : CD; donc les abscisses CA, CB, CD dont les différences AB, BD répondent aux espaces égaux ABLK, LBDM; sont en progression géométrique.

COROLLAIRE II.

226. Donc si l'on a une suite d'abscisses CA, CB, CD, CF en progression géométrique les aires hyperboliques ABLK, BDML, MDFN établies sur les dif-

férences des mêmes abscisses seront toutes égales entr'elles. Donc les aires ABLK, ADMK, AFNK croissent en progression arithmétique lorsque les abscisses CA, CB, CD, CF croissent en progression géométrique. Donc selon la définition des logarithmes, ces aires hyperboliques sont les logarithmes des abscisses correspondantes. Donc on peut calculer les logarithmes par le moyen des aires hyperboliques & réciproquement.

Tout ceci est une suite de ce qu'on a démontré dans le Corollaire premier. Comme cette théorie est extrêmement curieuse & d'un grand usage dans les différentes parties des mathématiques, nous ne pouvons nous empêcher d'entrer dans quelque détail que l'on ne sera pas fâché de trouver ici; & pour éclaircir encore davantage cette matiere, nous allons donner une nouvelle démonstration de cette propriété dans le Théorème suivant.

THÉOREME V.

Fig. 35. 227. *Si l'on a une suite d'abscisses* CA, CB, CD, CF *en progression géométrique : Je dis 1°. que leurs différences* AB, BD, DF *seront aussi en progression géométrique ; 2°. que les aires hyperboliques* ABLK, BDML, DFNM *établies sur les différences des mêmes abscisses sont égales.*

DÉMONSTRATION.

1°. Puisque ∺ CA : CB : CD : CF on aura CB — CA : CA :: CD — CB : CB & CD — CB : CB :: CF — CD : CD. Donc puisque CA, CB, CD sont supposées en progression géométrique, les différences CB — CA, CD — CB, CF — CD ou simplement AB, BD, DF y seront aussi. *C. Q. F. 1°. D.*

2°. Concevons que les différences AB, BD sont partagées chacune en un même nombre de parties égales *b*B, *d*D & infiniment petites par rapport aux mêmes lignes; concevons de plus que les aires hyperboliques

ABLK, BDML sont composées de petites surfaces BblL; DdmM qui ont les lignes Bb, Dd pour bases & les ordonnées pour hauteur; tout se réduit à prouver que ces élémens sont égaux, puisque leur nombre est supposé le même de part & d'autre. Cela posé, on aura par la supposition.

Bb : Dd :: AB : BD & par la 1ere. partie du Théorème. ..... AB : BD :: CA : CB & à cause de la progression géométrique ... CA : CB :: CB : CD, & parce que CD × DM = CB×BL ..... CB : CD :: DM : BL.

Donc puisque la suite des rapports égaux n'a pas été interrompue, on aura Bb : Dd :: DM : BL; donc Bb× BL = Dd ×DM, ou BblL = DdmM. On démontreroit de même l'égalité de tous les autres élémens; donc les aires hyperboliques sont égales lorsqu'elles ont pour bases les différences d'abscisses en progression géométrique. *C. Q. F. 2°. D.*

COROLLAIRE I.

228. Par la nature de l'hyperbole lorsque les abscisses CA, CB, CD, CF sont en progression géométrique les ordonnées correspondantes AK, BL, DM, NF, forment aussi une progression géométrique décroissante; & de plus les rapports de ces mêmes ordonnées comparées à la premiere AK sont aussi en progression géométrique croissante; car soit q le rapport de AK à BL; celui de AK à DM sera q^2, celui de AK à NF sera q^3; comme il est évident par la nature des progressions géométriques; donc les aires hyperboliques ABLK, ADMK, AFNK seront les logarithmes, non-seulement des abscisses CB, CD, CF, mais encore des ordonnées LB, MD, NF, & des rapports de la premiere ordonnée AK à ces mêmes ordonnées.

COROLLAIRE II.

229. Si l'on tire par le centre C les diametres CK,

CL, CM, CN, &c. Il est visible que les secteurs hyperboliques CLK, CML, CNM sont égaux entr'eux & aux espaces correspondans ABLK, BDML, DFNM; car supposant que le diametre CL coupe l'ordonnée AK en P, il est visible que le triangle CPK est égal au trapese APLB, puisqu'il n'y a qu'à ôter des triangles CAK, CBL égaux par la nature de l'hyperbole, le triangle commun CAP; donc ajoûtant de part à d'autre le triangle mixtiligne PLK, on aura le secteur CLK=ABLK, & ainsi des autres. Donc si les aires hyperboliques AL, AM, AN croissent en progression arithmétique & sont les logarithmes des abscisses CB, CD, CF, ou des ordonnées BL, DM, FN ou des rapports $\frac{AK}{BL}$, $\frac{AK}{DM}$, $\frac{AK}{FN}$; les secteurs hyperboliques CLK, CMK, CNK croîtront aussi en progression arithmétique, & seront les logarithmes des mêmes quantités.

COROLLAIRE III.

230. Il suit encore de-là que si les ordonnées AK, BL sont proportionnelles aux ordonnées DM, FN, ou, ce qui revient au même, si les abscisses CA, CB; CD, CF qui leur répondent sont en proportion, les aires asymptotiques ABLK, DFNM, ou les secteurs correspondans seront égaux entr'eux. C'est une suite nécessaire de ce que ces mêmes surfaces sont entr'elles comme les exposans des rapports des ordonnés AK, BL; DM, FN.

COROLLAIRE IV.

231. Supposant toujous AC = AK = 1, & l'origine des abscisses en A; si l'on nomme AB, ou AG, x; CB sera $1+x$, & CG sera $1-x$; donc puisque la suite $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ représente l'aire ABLK, & la suite $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$, l'aire AGHK; il s'ensuit que ces

deux suites représentent les logarithmes des nombres $1+x$ & $1-x$. Ainsi la premiere représentera les logarithmes des nombres plus grands que l'unité & la seconde ceux des nombres plus petits que l'unité. De plus, parce que l'unité a toujours zéro pour logarithme, dans l'hyperbole ; le logarithme d'une fraction $1-x$ sera nécessairement négatif : ainsi il faudra changer les signes de la deuxieme suite, en l'écrivant comme il suit $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$, &c. Ce qui est encore évident, parce que les aires ABLK, AGHK étant de différens côtés de l'origine des abscisses; si l'une est positive, l'autre doit être négative.

COROLLAIRE V.

232. Donc puisque pour faire la division par les logarithmes, il suffit de retrancher le logarithme du diviseur de celui du dividende, ce qui donne le logarithme du quotient; il s'ensuit que si de la suite $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, &c. logarithme de $1+x$, on ôte celle-ci $-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ &c. logarithme de $1-x$, on aura le reste $2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}$, qui sera le logarithme de $\frac{1+x}{1-x}$; & par conséquent, cette même suite sera le logarithme du nombre entier ou fractionaire représenté par cette même quantité $\frac{1+x}{1-x}$.

COROLLAIRE VI.

233. Si le quotient de $\frac{1+x}{1-x}$ est donné & supposé égal à la fraction $\frac{M}{N}$ qui devient un entier lorsque $N=1$; il sera facile d'avoir la valeur de x qui donne cette frac-

tion. On supposera $\frac{M}{N} = \frac{1+x}{1-x}$, d'où l'on tire aisément $x = \frac{M-N}{M+N}$. Donc si l'on nomme L le logarithme de la quantité $\frac{M}{N}$, on aura $L = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$, &c. & mettant pour x dans cette équation sa valeur trouvée ci-dessus en M & en N que l'on suppose connues ; on aura le logarithme L de $\frac{M}{N}$, d'autant plus exactement qu'on prendra un plus grand nombre de termes de cette suite qui sera toujours convergente ; d'où l'on tire une regle générale pour calculer les logarithmes des nombres fractionnaires ou entiers : car tout nombre entier est égal à une fraction dont le numérateur seroit égal à ce nombre & dont le dénominateur est l'unité.

Regle générale pour trouver les logarithmes hyperboliques de toutes sortes de nombres.

234. Si le nombre dont on demande le logarithme est un entier, l'ayant réduit en une fraction dont le dénominateur soit l'unité ; dans tous les cas, *on divisera la différence du numérateur au dénominateur par la somme des mêmes termes. On prendra toutes les puissances impaires de ce quotient divisées par leurs exposants. Le double de leur somme sera le logarithme hyperbolique demandé.*

EXEMPLE.

235. On demande le logarithme du nombre 2 ; ou de la fraction $\frac{2}{1}$ je, fais $M = 2$, $N = 1$; donc x ou $\frac{M-N}{M+N} = \frac{1}{3}$. Substituant à la place de x & de ses puissances cette même grandeur $\frac{1}{3}$ & ses puissances semblables dans la suite $2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5}$, &c ; on aura le lo-

garithme hyperbolique de 2 ; ce qui se pratique comme il suit par le moyen des décimales.

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{1} \times 0,\ 33333333 = 0,\ 33333333.$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{x}{9 \times 3} = \frac{1}{3} \times 0,\ 03703703 = 0,\ 01234567.$$

$$\frac{x^5}{5} = \frac{x^3}{9 \times 5} = \frac{1}{5} \times 0,\ 00411522 = 0,\ 00082304.$$

$$\frac{x^7}{7} = \frac{x^5}{9 \times 7} = \frac{1}{7} \times 0,\ 00045724 = 0,\ 00006532.$$

$$\frac{x^9}{9} = \frac{x^7}{9 \times 9} = \frac{1}{9} \times 0,\ 00005080 = 0,\ 00000564.$$

$$\frac{x^{11}}{11} = \frac{x^9}{9 \times 11} = \frac{1}{11} \times 0,\ 00000564 = 0,\ 00000051.$$

Somme des quotients 0, 34657351.
dont le double . . . . 0, 69314702.
est le logarithme hyperbolique de 2.

SCHOLIE.

236. Si l'on compare le nombre 0,69314702 qu'on vient de trouver pour le logarithme de 2 avec le logarithme 0,30103000 du même nombre pris dans les tables ; on verra aisément que ces logarithmes appartiennent nécessairement à différens systêmes ; mais lorsqu'on a le logarithme hyperbolique d'un nombre, il est fort aisé de trouver par son moyen le logarithme tabulaire du même nombre par une simple proportion ; & c'est même un des grands avantages des logarithmes hyperboliques. Voici comment cela se pratique. Soit L le logarithme hyperbolique d'un nombre dont on demande le logarithme tabulaire. On sçait que dans le systême ordinaire le logarithme de 10 est 1,00000000 ; d'ailleurs on a calculé par une méthode à peu près semblable à celle qu'on vient de voir ci-dessus le logarithme

hyperbolique de 10 que l'on a trouvé 2,30258509: Ainsi il n'y a qu'à faire cette proportion 2,30258509: 1,00000000 : : L : $x = \frac{L \times 1,00000000}{2,30258509}$, ce quatrieme terme sera le logarithme tabulaire du nombre donné. Pour abréger encore l'opération, on a cherché le quotient de ces deux nombres; si l'on se donne la peine de faire le calcul, on trouvera le quotient = 0,43429448; donc pour avoir le logarithme tabulaire d'un nombre quelconque, il suffira de multiplier son logarithme hyperbolique par ce même nombre 0,43429448 que les géometres ont appellé le *module* des logarithmes hyperboliques; ainsi, par exemple, si l'on multiplie le nombre 0,69314702 logarithme hyperbolique de 2 par le module, on trouvera le logarithme tabulaire du même nombre égal à 0,30102992461444 96, ou en ne prenant que les huit premiers chiffres 0,30103000, parce que 99246, &c. valent à peu près une unité.

Tout ce qu'on vient de voir dans le Scholie précédent est uniquement appuyé sur ce que les logarithmes des mêmes nombres dans différentes hyperboles, ou ce qui revient au même, les trapezes ou secteurs hyperboliques correspondans à des ordonnées proportionnelles, sont toujours dans un rapport constant. Quoiqu'il soit très-aisé de se convaincre de cette vérité, nous allons néanmoins la démontrer dans le Théorême suivant, pour ne rien laisser à désirer sur cette théorie des logarithmes.

THEOREME VI.

Fig. 36. & 37. 237. *Soient deux hyperboles quelconques* AM, DN *décrites entre leurs asymptotes;* CA & AB, *les demi-axes de la premiere,* CD & DF *les demi-axes de la seconde; si l'on prend sur une asymptote de chaque hyperbole des abscisses* CG, CP, CL, CQ *proportionnelles entr'elles; je dis,* 1°. *que les ordonnées* GA, PM; DL, QN *menées par les extrémités de ces abscisses parallelement à l'autre*

asymptote seront aussi en proportion; 2°. *Que les aires hyperboliques* AGPM, DLQN *comprises entre les mêmes ordonnées seront entr'elles comme les rectangles des axes, ou comme les puissances* AGCH, DLCK *des mêmes hyperboles.*

DÉMONSTRATION.

1°. Par hypotèse CG : CP :: CL : CQ ; mais par la nature de chaque hyperbole CG : CP :: PM : GA & CL : CQ :: QN : DL ; donc PM : GA :: QN : DL. *C. Q. F.* 1°. *D.*

Donc si l'on fait les côtés CG ou GA de la puissance AGCH $= m$ & les côtés CL, DL de l'autre puissance DLCK $= n$; CP $= x$, PM $= y$; LQ $= u$ & QN $= z$; on aura $m : m + x :: n : n + u$; d'où l'on tire $u = \frac{nx}{m}$.

2°. Par les extrémités G, L des droites AG, DL soient menées les perpendiculaires GR, LS aux asymptotes CH & CK ; il est visible que dans chaque hyperbole les espaces AGPM, DLQN compris entre les ordonnées obliques AG, PM ; DL, QN sont aux espaces qui auroient les mêmes bases & les mêmes ordonnées, mais perpendiculaires à ces mêmes bases, comme le sinus total, est au sinus d'inclinaison des asymptotes ; c'est-à-dire, dans la premiere hyperbole, comme CG : GR & dans la seconde comme CL : LS ; donc pour avoir ces mêmes surfaces, il n'y a qu'à chercher l'aire de ces trapeses comme si les ordonnées étoient perpendiculaires aux asymptotes & les multiplier ensuite par les rapport $\frac{GR}{CG}$, $\frac{LS}{CL}$; cela posé de la proportion CG : CP :: PM : AG ou $m : m + x :: y : m$ on tire $y = \frac{mm}{m+x}$ ou $mm \times \frac{1}{m+x}$. Réduisant cette fraction en suite infinie on trouve $y = mm \times \left(\frac{x^0}{m} - \frac{x}{mm} + \frac{x^2}{m^3} - \frac{x^3}{m^4}, \&c. \right)$

Donc en sommant chaque terme de cette suite (comme à l'art. 224.) on aura l'aire AGPM $= \frac{RG}{CG} \times mm$ ou $RG \times m \times \left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{x^3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4}, \&c.\right)$.

Pareillement à cause de la proportion CL : CQ :: QN : DL ou $n : n + u :: z : n$, on a $z = \frac{nn}{n+u} = nn \times \frac{1}{n+u}$; réduisant la fraction en suite infinie, on trouve $z = nn \times \left(\frac{u^0}{n} - \frac{u}{nn} + \frac{u^2}{n^3} - \frac{u^3}{n^4}, \&c.\right)$; sommant chaque terme on trouvera laire DLQN $= \frac{LS}{CL} \times nn$ ou $LS \times n \times \left(\frac{u}{n} - \frac{u^2}{2n^2} + \frac{u^3}{3n^3} - \frac{u^4}{4n^4}, \&c.\right)$ qui devient $LS \times n \times \left(\frac{x}{m} - \frac{x^2}{2m^2} + \frac{3}{3m^3} - \frac{x^4}{4m^4}, \&c.\right)$ en mettant pour u sa valeur $\frac{nx}{m}$.

Donc puisque ces deux suites sont les mêmes, on aura AGPM : DLQN :: $RG \times m$: $LS \times n$; mais on a $RG \times m =$ AGCH & $LS \times n =$ DLCK ; donc les aires hyperboliques AGPM, DLQN comprises entre les ordonnées proportionnelles ; sont entr'elles comme les puissances des hyperboles auxquelles elles appartiennent, & par conséquent aussi comme les rectangles des axes de ces mêmes hyperboles. *C. Q. F.* 2°. *D.*

COROLLAIRE I.

238. Donc si l'on nomme a & b, les demi-axes d'une hyperbole, c & d les demi-axes d'une autre hyperbole ; les aires hyperboliques comprises entre des ordonnées proportionnelles, ou ce qui revient au même, les logarithmes du même nombre exprimé par le rapport de ces ordonnées ou des abscisses correspondantes, seront entr'eux comme les rectangles ab & cd ; ou encore comme

les parallélogrammes formés sur deux diametres conjugués quelconques, puisque tous ces parallélogrammes sont égaux aux rectangles des axes (*art.* 158.).

COROLLAIRE II.

239. Si les hyperboles que l'on compare ont un axe commun, les logarithmes des mêmes nombres seront entr'eux comme les axes inégaux ou non-communs. Si les axes de l'une sont réciproques aux axes de l'autre les logarithmes des mêmes nombres seront égaux à cause que pour lors $ab = cd$. Si les hyperboles sont semblables, ou, ce qui revient au même, si ces courbes sont décrites dans un même angle d'asymptotes; les logarithmes des mêmes nombres seront entr'eux comme les quarrés des axes ou des diametres homologues.

COROLLAIRE III.

240. Donc la puissance d'une hyperbole ou le rectangle de ses axes est toujours la mesure qui détermine la grandeur des logarithmes correspondants aux différens nombres exprimés par les rapports des ordonnées; & le *module* d'un systême de logarithmes n'est autre chose que cette même puissance convenable à l'hyperbole qui donne ce même systême.

COROLLAIRE IV.

241. Donc si l'on a le logarithme d'un nombre quelconque dans une hyperbole dont les axes ou la puissance sont donnés; & qu'on demande le logarithme du même nombre dans une autre hyperbole dont les axes ou la puissance sont aussi donnés, il n'y aura qu'à faire cette proportion; *la puissance donnée de la premiere hyperbole est à la puissance de la seconde, comme le logarithme donné est au logarithme cherché.*

COROLAIRE V.

242. Réciproquement connoissant les logarithmes d'un même nombre dans deux hyperboles différentes, on trouvera toujours les puissances de ces hyperboles par cette proportion; *le logarithme de l'hyperbole dont on a la puissance, est au logarithme du même nombre dans l'hyperbole dont on cherche la puissance; comme la puissance donnée est à la puissance cherchée.* Par exemple, pour avoir la puissance de l'hyperbole qui donne les logarithmes des tables; on supposera la puissance d'une hyperbole quelconque = 1, 00000000 & l'on cherchera dans cette hyperbole le logarithme d'un nombre quelconque comme celui du nombre 2, que l'on a trouvé (*art.* 235.) être égal à 0, 69314702: on cherchera ensuite le logarithme du même nombre dans les tables, qui est 0, 30102992 & l'on fera cette proportion 0, 69314702 : 0,30102992 :: 1,00000000;0,43429448, qui est le module ou la puissance de l'hyperbole par le moyen de laquelle on peut construire les logarithmes des tables; ainsi l'on doit aussi regarder ces logarithmes comme des logarithmes hyperboliques; & même il seroit ridicule de distinguer les logarithmes des tables, des logarithmes hyperboliques; à moins que l'on ne restraigne le nom de logarithmes hyperboliques à une certaine espéce de logarithmes calculés par un systême particulier comme ont fait certains Auteurs.

COROLLAIRE VI.

Fig. 36. 243. Donc la surface d'un trapese hyperbolique quelconque tel que AGPM, ou le logarithme du rapport des ordonnées AG, PM qui le terminent est à la puissance de l'hyperbole comme 43429448 est à 100000000; d'où il est aisé de trouver la surface de ce trapese par le moyen d'une table des logarithmes, comme on va le voir dans le Problême suivant.

PROBLEME IX.

PROBLEME IX.

244. *Connoissant le rapport des ordonnées* AG, PM *qui terminent un trapese hyperbolique quelconque trouver la surface de ce trapese, par le moyen d'une table des logarithmes.* Fig. 36.

SOLUTION.

Puisque l'hyperbole AM est donnée, sa puissance est aussi donnée; on la supposera de 100000000; ensuite on cherchera les logarithmes de chaque ordonnée AG, PM, dont on prendra la différence, qui sera le logarithme du rapport $\frac{AG}{PM}$, de ces ordonnées, & l'on fera cette proportion, 43429448 *est à la différence des logarithmes des ordonnées* AG, PM; *comme* 100000000 *est à la surface comprise entre les mêmes ordonnées. C. Q. F. T.*

N. B. Il faut bien remarquer que si l'on regarde le module 4342, &c. comme un nombre entier, la différence des logarithmes trouvés, doit aussi être regardée comme un entier.

EXEMPLE.

245. Supposons que les ordonnées AG, PM sont entr'elles comme 36 est à 5. Les logarithmes de ces nombres sont 1,55630250 & 0,69897000 dont la différence regardée comme nombre entier sera 85733250; on fera donc cette proportion 43429448 : 85733250 :: 100000000 : AGPM que l'on trouvera de 19740810 parties égale à celle de la puissance.

M. *Huyghens* est le premier qui ait donné cette quadrature de l'hyperbole : elle se trouve dans son Traité de *Horologio Oscillatorio*, avec cette différence que l'Auteur résoud ce Problême en cherchant le logarithme de l'aire AGPM. Il est plus commode de le résoudre comme nous venons de faire, à moins que l'on n'ait des grandes tables de logarithmes.

Réflexions sur la nature de l'espace infini compris entre l'hyperbole & son asymptote.

Fig. 35. 246. Nous avons démontré (*art.* 225.) que si les abscisses CA, CB, CD, CF croissent en progression géométrique, les différences de ces mêmes abscisses croissent aussi en progression géométrique, tandis que les ordonnées qui leur répondent diminuent dans la même raison. Cela posé, si l'on conçoit que l'aire comprise entre l'hyperbole & son asymptote est composée de surfaces finies telles que ABLK, BDML, &c. correspondantes aux différences d'abscisses en progression géométriques, toutes ces surfaces seront égales entr'elles (*art.* 225). De plus, si l'on imagine une derniere ordonnée infiniment petite par rapport à la premiere AK, il faudra pour y arriver une infinité de termes dans la progression géométrique; donc il y aura une infinité de différences & par conséquent une infinité de surfaces finies égales à une surface telle que ABLK; en sorte que la derniere même est égale à la premiere : car pour avoir chacune de ces surfaces, il faut nécessairement avoir égard à leurs dimensions qui sont leurs bases & leurs hauteurs; mais il est évident que si l'ordonnée du dernier trapese hyperbolique est infiniment petite par rapport à l'ordonnée BL du premier trapese ABLK; aussi la derniere différence des abscisses, ou la base de ce dernier trapese sera infiniment plus grande que la premiere différence AB; donc cette surface extrême est encore une quantité finie. Donc l'espace entier compris entre l'hyperbole & son asymptote est infini. Quand à l'unité par rapport à laquelle cette surface est infinie, il est aisé de voir qu'elle est d'abord arbitraire, & qu'ainsi on peut prendre ABLK pour représenter cette unité; mais si au lieu de la surface ABLK on prenoit le trapese ADMK double du premier; alors le quotient aussi infini qui

marqueroit combien de fois l'aire hyperbolique contiendroit cette seconde surface ne seroit que la moitié du premier quotient infini qui marquoit combien de fois l'aire ABLK étoit contenue dans l'espace asymptotique. Or, on peut concevoir un infini qui soit à un autre dans un rapport donné si l'on fait attention que dans deux lignes données qui ont un rapport fini entr'elles, on peut imaginer un égal nombre infini de parties & ces infinis seront entr'eux dans la même raison que les lignes données.

COROLLAIRE I.

247. Tous les raisonnemens que nous venons de faire pour démontrer que l'espace asymptotique est infini, sont uniquement appuyés sur ce que les ordonnées diminuent précisément dans la même raison que les abscisses ou leur différences augmentent. On peut déduire de-là une regle générale pour connoître si une suite d'une infinité de termes doit avoir une somme finie ou infinie. Pour cela *il faut considérer dans chaque terme deux dimensions ; si l'une des dimensions augmente comme l'autre diminue, la somme de tous les termes sera nécessairement infinie. Si l'une des dimensions augmente moins que l'autre ne diminue ; ou, ce qui revient au même, si l'une des dimensions augmente plus que l'autre ne diminue, en prenant dans ce dernier cas la suite dans un ordre renversé, on arrivera nécessairement à un terme qui sera zero, & par conséquent la suite sera une quantité finie.* Faute d'avoir fait attention à l'identité de ces deux derniers cas, *M. Wallis* a regardé cet espace comme plus qu'infini lorsque l'une des dimensions augmente plus que l'autre ne diminue ; & d'autres Géometres ont fait la même faute après lui : seulement il faut remarquer que dans ce dernier cas, la suite vient sous une forme négative ; mais elle est toujours finie. Au reste, ce principe n'est pas seulement applicable aux surfaces des courbes, mais encore aux solides formés par leurs révolutions.

COROLLAIRE II.

248. On demontre que si l'espace infini asymptotique CRSLXT tourne autour de l'asymptote CT, il engendrera dans cette rotation un solide fini double d'un cylindre qui auroit pour base le cercle fait sur CR, & RS pour hauteur; ce qui paroît d'abord fort surprenant. Comment un espace fini peut-il être engendré par la révolution d'un espace infini? Cet infini générateur changeroit-il de nature par la révolution? Cela n'est pas concevable. Quelques personnes même seroient tentées de croire que l'espace générateur n'est pas infini. Mais ce seroit une erreur bien grossiere, car la même raison qui fait que l'espace asymptotique est infini veut aussi que le solide engendré par la révolution de cet espace infini, soit une grandeur finie; & l'on voit ici une heureuse application du principe exposé dans le Corollaire précédent. Les espaces égaux ABLK, BDML forment en tournant autour de l'asymptote CT une suite de solides dans lesquels il faut considérer les bases & les hauteurs. Les bases de ces solides diminuent comme les quarrés des ordonnées AK, BL, &c. *c'est-à-dire*, comme les quarrés des termes d'une progression géométrique d'écroissante à l'infini, tandis que les hauteurs ou les différences AB, BD, DF croissent comme les termes d'une progression géométrique croissante à l'infini; donc le dernier solide sera nécessairement zero. Donc la suite doit être finie. Donc l'espace infini asymptotique doit engendrer un solide fini.

249. Pour ne rien laisser à désirer sur le dernier Corollaire, nous allons chercher la solidité du corps formé par la révolution de l'espace asymptotique autour de l'asymptote CT. Par le point H soit menée une droite HQ parallele à l'asymptote CT & par le point *h* une droite *hq* infiniment proche de la premiere. On peut imaginer que le solide est composé d'une infinité d'anneaux formés par la révolution d'un petit trapese tel que Q*qh*H.

Comme tous ces anneaux ont une même base, ils seront entr'eux comme les surfaces cylindriques engendrées par la révolution de QH autour de CT. Donc la somme de tous ces petits corps sera comme la somme de toutes ces surfaces. Cela posé, soit fait CR $= a$, RS $= b$, CQ $= x$, QH $= y$; soit c la circonférence décrite par le rayon CR; on aura $a : c :: x : \frac{cx}{a}$ égale à la circonférence décrite du rayon CQ. Donc $\frac{cxy}{a}$ sera la surface décrite par la révolution de QH; mais à cause de l'équation $xy = ab$, on aura $y = \frac{ab}{x}$; donc $\frac{cxy}{a} = \frac{cabx}{ax} = cbx^{o}$; dont la somme $= cbx$, ou en faisant $x = a$, le solide engendré par l'espace asymptotique $= abc$. D'où il suit évidemment que ce solide est double d'un cylindre qui auroit pour base le cercle fait sur CR & RS pour hauteur. On trouveroit par les mêmes principes que si le même espace CRSLXT tourne autour de l'asymptote CR, il engendrera un solide infini par rapport au solide formé par la révolution du même espace autour de l'asymptote CT.

Des Sections Coniques semblables.

DÉFINITIONS.

Fig. 38. 39. & 40.

250. DEUX Sections Coniques sont *semblables* lorsque les axes A*a*, B*b*, de l'une sont proportionels aux axes D*d*, F*f* de l'autre.

COROLLAIRE I.

251. Donc elles seront aussi semblables si les distances d'un foyer au centre & aux extrémités de l'axe sont proportionnelles; car cette proportionnalité emporte nécessairement celle des axes; d'où il suit évidemment que toutes les paraboles seront des figures semblables, puisque les distances du foyer au sommet & au centre sont

toujours comme une quantité finie à une grandeur infinie.

COROLLAIRE II.

252. Donc toutes les hyperboles semblables auront les mêmes asymptotes, si elles ont un centre & un axe commun: & réciproquement, si deux hyperboles sont comprises dans des asymptotes qui fassent un même angle, elles seront semblables. Tout ceci est une suite de la Définition précédente & de la Description des asymptotes.

COROLLAIRE III.

253. Donc toutes les lignes qui feront avec les axes des Sections Coniques semblables des angles égaux, comme les diametres conjugués correspondans, les tangentes ou les sécantes homologues seront des lignes proportionnelles, & les surfaces comprises entre des portions semblables de courbes semblables, & des lignes homologues seront entr'elles comme les quarrés des lignes tirées de la même maniere dans chaque courbe.

THEOREME.

Fig. 38. 39. & 40. 254. *Soient deux Sections Coniques semblables concentriques & dont les axes soient places sur les mêmes lignes; ayant tiré un diametre quelconque* CDA *ou* CAD *qui coupe la courbe intérieure en* D, *& mené par ce point une tangente* DL *à cette même courbe terminée à l'autre en* L; *si par un point queconque* M *on tire une droite* MOPN *terminée de part & d'autre à la courbe extérieure & parallele à la tangente en* D, *je dis que l'on aura pour toute Section Conique* $MO \times ON = \overline{DL}^2$.

DÉMONSTRATION.

255. Soient a & p le diametre CA & son parametre, α & π le diametre correspondant CD & son parametre. Il est visible que les lignes MN, Oo seront des doubles ordonnées aux diametres CA & CD qui les divisent

chacune en deux également; donc on aura $\overline{PM}^2 : \pm\overline{CA}^2 \mp\overline{CP}^2 :: p : a$ & $\overline{PO}^2 : \pm \overline{CD}^2 \mp \overline{CP}^2 :: \pi : \alpha$; donc puisque les Sections Coniques semblables donnent $p : a :: \pi : \alpha$, on aura $\overline{PM}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 :: \overline{PO}^2 : \pm \overline{CD}^2 \mp \overline{CP}^2$; donc *alternando* & *dividendo* $\overline{PM}^2 - \overline{PO}^2$ ou $MO \times ON : \overline{PM}^2 :: \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CD}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2$ & à cause des ordonnées DL, PM, $\pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CD}^2 : \pm \overline{CA}^2 \mp \overline{CP}^2 :: \overline{DL}^2 : \overline{PM}^2$; donc $MO \times ON : \overline{PM}^2 :: \overline{DL}^2 : \overline{PM}^2$; donc $MO \times ON = \overline{DL}^2$. *C. Q. F. D.*

N. B. Il faut remarquer que cette proposition ne sera vraie dans la parabole, qu'autant que la ligne AD sera celle qu'on doit trouver lorsque les paraboles seront disposées comme elles doivent l'être pour avoir un centre commun. Dans tout autre cas on trouvera $MO \times ON = AP \times p - PD \times \pi$ qui devient $\overline{DL}^2$ lorsque les parametres p & π sont égaux. On peut déduire de-là des vérités bien neuves & bien intéressantes sur les rapports des différens infinis d'un même ordre.

COROLLAIRE I.

255. Soit encore menée par le même point O une droite ROS parallele à une tangente GK à la courbe intérieure; on démontrera de même que $RO \times OS = \overline{GK}^2$; donc on aura $MO \times ON : RO \times OS :: \overline{DL}^2 : \overline{GK}^2$ d'où il suit que si deux droites quelconques RS, MN se coupent au-dedans d'une section conique quelconque, les rectangles des ségments sont toujours en raison constante; ce qui se prouveroit aussi aisément pour les sécantes extérieures.

COROLLAIRE II.

256. Il suit encore delà que les Sections Coniques semblables concentriques dont les axes seront sur une même droite, seront aussi des courbes asymptotes, les unes par rapport aux autres; c'est-à-dire, qu'elles s'ap-

procheront à l'infini ſans jamais pouvoir ſe rencontrer ; lorſqu'elles auront deux branches infinies, comme la parabole & l'hyperbole ; d'où il ſuit encore que cette derniere courbe doit s'approcher à l'infini de ſes aſymptotes, puiſque ces deux lignes ſont la limite de toutes les hyperboles ſemblables qu'on peut décrire dans un même angle, & par conſéquent doivent avoir les propriétés des hyperboles ſemblables.

SCHOLIE.

Ce Theorême eſt un des plus beaux qu'on puiſſe donner ſur les Sections Coniques, & l'on peut en déduire aiſément toutes les conſtructions qu'a données M. *Newton* pour réſoudre le Problême de *Pappus*, lorſque la courbe eſt une Section Conique. On pourroit en faire uſage pareillement lorſqu'il s'agit de faire paſſer une Section Conique par pluſieurs points donnés dans certaines conditions. Les bornes de cet Ouvrage ne nous permettent pas de nous étendre d'avantage : ceux qui voudront entrer dans un plus grand détail pourront conſulter le Traité que j'ai donné il y a quelques années ſur les mêmes courbes.

ERRATA.

PAGE 9. *lig.* 9. de diſcuter les courbes, *liſez*, de diſcuter les propriétés des courbes. *Page* 29. *ligne* 6. *au lieu de* $-\frac{cx}{a}$, *liſez*, $+\frac{cx}{a}$. *Page* 78. *ligne* 11. on aura FD : FL, *liſez*, on aura FL : FD. *Ibid. art.* 166. *au lieu de* comique, *liſez*, conique. *Page* 89. *tout au bas*, *au lieu de* $\overline{a \pm x}^2$ & de $\overline{a + x}^2$, *qui ſont les dénominateurs des deux fractions qu'on trouve dans cette ligne*, *liſez*, $\overline{a \mp x}^2$; & *au dernier terme du numérateur de la ſeconde fraction*, *au lieu de* $+ a^2x^2$, *liſez*, $\mp a^2x^2$. *Page* 94. *ligne* 15. *au lieu de* $\frac{}{4}pp$, *liſez*, $\frac{1}{4}pp$. *Page* 103. *Corollaire II. ligne* 4. pas moins complette, *liſez*, n'en ſera pas moins une quadrature abſolue. *Liſez le commencement de la phraſe d'après comme il ſuit* ; ainſi l'on peut diſtinguer en général trois ſortes de quadratures algébriques des courbes par rapport aux quadratures numériques que l'on veut en déduire.

Art. 59. *De l'ellipse*, & 118. *de l'hyperbole, on trouvera vers le milieu de chaque Démonstration*, faisant encore un *componendo* & un *dividendo* pour chacune ; *ce qui ferait croire que ces deux changemens ont lieu à la fois sur chaque proportion ; il sera plus exact de mettre* faisant encore un *componendo* pour la premiere, & un *dividendo* pour la seconde, &c.

Art. 70. *De l'ellipse vers la fin du Corollaire III., on lit ce qui suit* ; de plus il est visible qu'on peut faire une semblable opération en se servant du rayon *mf* comme du rayon *m*F, ce qui donneroit une autre tangente qui passeroit par le point *m* & toucheroit l'ellipse dans la partie *a*B. *On pourroit inférer de-là que la premiere construction ne suffiroit pas pour donner cette tangente ; ce n'est pas là le sens du Corollaire.* La figure seule suffit pour faire voir que chaque rayon *mf*, *m*F donne également les deux tangentes.

Art. 106. *De l'ellipse vers la fin du Scholie, on lit* : l'angle EDI devient l'angle EDL, (ce qui n'est pas vrai) *il faut lire seulement*, le centre G se confond avec le point L. *Si l'on veut déduire cette vérité de notre construction générale, voici le raisonnement qu'il faut faire.* Puisque l'angle EDI doit toujours être égal à l'angle donné des diametres conjugués, cet angle devient droit pour les axes ; donc DI est alors parallele à E*t*, & le rayon DI est infini ; ce qui rend DK aussi parallele à LK ; donc puisque le centre G se détermine en menant par F une droite FG parallele à DK, il est évident qu'il faudra dans le cas présent mener par le même point F une droite parallele à KL, qui ne peut être que la ligne FL, & partant le point L est le centre demandé, ce qui

ſe voit d'ailleurs tout de ſuite à l'inſpection de la figure.

Art. 224. *à l'alineâ, on trouve ce qui ſuit* : dans la ſuite $c - \frac{cx}{a}$, &c. trouvée pour la valeur de y, il n'y a qu'à faire x négatif, ce qui donne $y = c + \frac{cx}{a} + \frac{cx^2}{a}$, &c. On a enſuite ſommé cette ſuite comme pour un x poſitif, ce qui a donné une valeur poſitive de l'aire AGHK. *C'eſt pourquoi à l'article 231. j'ai été obligé de prendre en moins tous les termes de cette ſuite. On auroit évité ces deux opérations, en changeant ſeulement les ſignes des termes impairs dans la premiere ſuite trouvée* $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$, &c. ce qui auroit donné pour la formule générale des logarithmes des nombres entiers ou fractionaires. $L = \pm x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, &c.

Fautes moins eſſentielles à corriger.

Avant-Propos, pag. iv. Tel, *liſez* Telle. *Pag.* 6. *ligne* 20. FF×PG, *liſ.* FP×PG. *Pag.* 11. *après* g*, *ajoutez* =o. *Pag.* 14. *lig.* 16- *au lieu de* mf, *liſ.* mF. 8. *lig. plus bas, au lieu de* la même, *liſ.* la même choſe. *Pag.* 42. *lig.* 22. $\overline{QN}^2$ *liſ.* $\overline{QM}^2$. *Pag.* 43. *art.* 93. *liſ.* par les extrémités N, Q de cette ordonnée des perpendiculaires NS, QR, &c. *Pag.* 44. *vers le bas, au lieu de* OP : : ON, *liſ.* ON : : OP. *Pag.* 64. $Qr\left(\frac{}{bb}\right)$, *liſ.* $Qr\left(\frac{aay}{bb}\right)$. *Pag.* 95. *lig.* 10. *au lieu de* PL, *liſ.* BL.

Planche Premiere

Fig. 6.

Fig. 4.

Fig. 5.

Fig. 8.

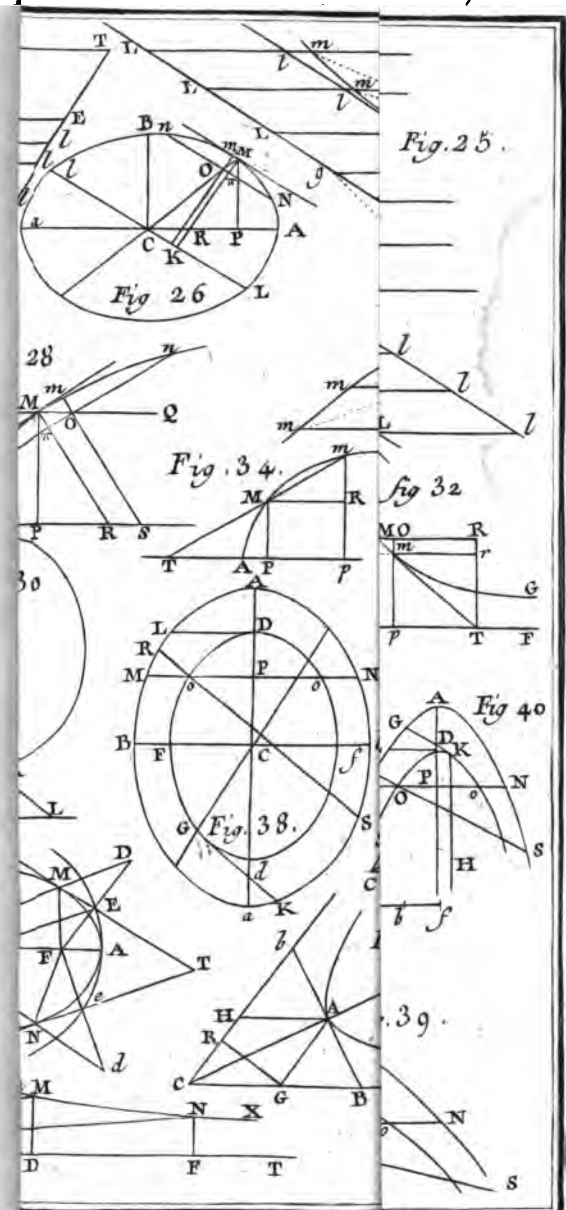
Fig. 9.

Fig. 12.

14



Fig. 20.


Fig. 25.
Fig 26
28
Fig. 34.
fig 32
30
Fig 40
Fig. 38.
.39.